II. LES RACINES CARREES ET CUBIQUES

A. Racines carrées

1. Introduction

a) Si l'aire d'un carré est égale à 64cm², combien mesure chacun de ses côtés ? Justifie.

b) Et pour une aire de 9cm², le côté doit mesurer : ……… cm

➔ L'opération que tu viens d'utiliser pour calculer ces deux réponses n'est ni une addition, ni une soustraction, ni une multiplication, ni une division.

➔ **En fait, tu viens d'utiliser une nouvelle opération mathématique qui est « extraire la racine carrée ».**

Elle se note par le symbole $\sqrt{}$

c) Le principe te paraît simple ? Alors, à toi de calculer :
$\sqrt{1} =$........ ; $\sqrt{4} =$........ ; $\sqrt{9} =$........ ; $\sqrt{16} =$........ ; $\sqrt{25} =$........

➔ **Tu connais ces nombres, vus en 1ère année comme étant des CARRÉS PARFAITS**

➔ **Tous les carrés parfaits** (série infinie) **possèdent une racine carrée positive entière. Il est donc très important de les connaître et d'en reconnaître un maximum.**

d) Rappel **À ÉTUDIER** : **les carrés parfaits des 15 premiers nombres naturels** ($\neq 0$).

$1^2 =$ ……	$5^2 =$ ……	$9^2 =$ ……	$13^2 =$ …….
$2^2 =$ ……	$6^2 =$ ……	$10^2 =$ …….	$14^2 =$ …….
$3^2 =$ ……	$7^2 =$ ……	$11^2 =$ …….	$15^2 =$ …….
$4^2 =$ ……	$8^2 =$ ……	$12^2 =$ …….	

e) Mais qu'en est-il pour tous les autres nombres ?
En effet, si l'aire d'un carré est de 8cm², quelle est la mesure de son côté ?

On peut prévoir qu'il ne s'agit pas d'un nombre entier et on peut l'estimer comme étant une valeur x comprise entre 2 et 3 car 8 se trouve entre les carrés parfaits 4 et 9.

A la calculatrice, cherchons à préciser encore plus cette estimation :

$2,1^2 = 4,41$

$2,3^2 = 5,29$

$$\left.\begin{array}{l} 2,8^2 = 7,84 \\ 2,9^2 = 8,41 \end{array}\right\} 2,8 < x < 2,9$$

Essayons d'être encore plus précis :

$2,81^2 = 7,90$

$2,85^2 = 8,12$

$$\left.\begin{array}{l} 2,82^2 = 7,9524 \\ 2,83^2 = 8,0089 \end{array}\right\} 2,82 < x < 2,83$$

On pourrait continuer ainsi encore longtemps mais il nous sera impossible de connaître la valeur exacte de x car c'est **un nombre décimal illimité (non périodique**).
Nous ne pouvons qu'en donner des valeurs approchées.

- ➔ **Le nombre dont le carré est égal à 8 s'écrira** $\sqrt{8}$ **(et se lira « racine carrée de 8).**
- ➔ Ce nombre n'est <u>pas</u> un rationnel. **Toutes les racines carrées égales à des nombres illimités non périodiques sont appelés des nombres irrationnels.** (le plus connu est $\boldsymbol{\pi}$). Le rappel des définitions des différents ensembles de nombres sera vu dans un des chapitres de la partie « compléments du cours »

Remarque : tu as déjà vu que l'écriture $\frac{2}{7}$ *est préférable à l'écriture décimale lorsque ce rationnel est un décimal illimité périodique. Il en va de même avec les radicaux : il est plus précis de parler de* $\sqrt{2}$ *que de parler de 1,4 ou de 1,41421356.*

f) <u>Application</u>

Détermine la longueur du côté de chaque carré dont l'aire est donnée.
!!!Attention, tu ne peux pas utiliser ta calculatrice.!!!

Aire en m²	81	196	5	$\frac{4}{9}$	$\frac{50}{72}$	0,09	6,25	1,21
Longueur en m								

Aire en m²	11	3600	$\frac{1}{100}$	0,0144	$\frac{9}{25}$	0,000016	2,5	12,1
Longueur en m								

2. Définition

La racine carrée positive d'un nombre positif a, notée $\sqrt{a}$, est le nombre positif x dont le carré vaut a.

Si $a \geq 0$: $\sqrt{a} = x \Leftrightarrow x^2 = a \; et \; x \geq 0$

Exemples :

$\sqrt{9} = 3 \; car \; 3^2 = 9$ $\sqrt{0} = 0 \; car \; 0^2 = 0$

$\sqrt{1,21} = 1,1 \; car \; 1,1^2 = 1,21$ $\sqrt{1} = 1 \; car \; 1^2 = 1$

Remarques :

- Dans l'expression $\sqrt{a}$, a est appelé le **radicand** et $\sqrt{}$ est le **radical**
- Un nombre positif admet deux racines carrées opposées.
  Ex. : la racine carrée positive de 25 s'écrit $\sqrt{25}$ et vaut 5.
  La racine carrée négative de 25 s'écrit $-\sqrt{25}$ et vaut -5.
- **Un nombre strictement négatif n'a pas de racine carrée réelle.**
  Ex. : -81 n'a pas de racine carrée réelle car il n'existe pas de nombre réel a tel que $a^2 = -81$.
- Le radical doit couvrir tout le radicand.
  Ex. : $\sqrt{32}54$ est une écriture incorrecte. La bonne écriture est : $\sqrt{3254}$

3. Exercices

1) Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

$\sqrt{9}$ est un nombre qui a pour carré 9.	
$\sqrt{144} = 72$	
Il n'existe pas de nombre qui ait 7 pour carré.	
Il n'existe pas de nombre qui ait –1 pour carré.	
$\sqrt{5^2} = 5$	
Un nombre entier impair ne peut pas avoir pour racine carrée un nombre entier.	

2) Les écritures suivantes ont-elles un sens ? Réponds par oui ou non.

$\sqrt{-7}$........; $-\sqrt{7}$.........; $\sqrt{-2^2}$........; $\sqrt{(-3)^2}$..........; $\sqrt{(-3)^3}$.........; $\sqrt{5^{-1}}$........

3) Encadre les racines carrées suivantes par deux nombres entiers consécutifs.

a) Mentalement

$.......<\sqrt{90}<.......$ $......<\sqrt{45}<.......$ $......<\sqrt{12}<......$ $......<\sqrt{104}<......$

$......<\sqrt{30}<.......$ $......<\sqrt{89}<........$ $........<\sqrt{130}<.......$ $......<\sqrt{250}<......$

b) Avec une calculatrice

$.......<\sqrt{1265}<.......$ $......<\sqrt{896}<......$ $......<\sqrt{12456}<......$

$......<\sqrt{987}<.......$ $......<\sqrt{79964}<......$ $.......<\sqrt{301}<........$

4) Calcule mentalement.

$\sqrt{36}=.......;\sqrt{0,81}=..........;\sqrt{2500}=........;\sqrt{\frac{1}{100}}=..........;-\sqrt{25}=.........$

$\sqrt{0,000004}=............;\sqrt{1,44}=................;\sqrt{1000000}=...............;\sqrt{0,0121}=.........$

4. Propriétés

- Si a, b sont des réels positifs, alors $\sqrt{a.b}=\sqrt{a}.\sqrt{b}$
- Si a est un réel positif et b un réel positif non nul, alors $\sqrt{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$

Exemples : $\sqrt{5.6}=\sqrt{5}.\sqrt{6}$ $\sqrt{\frac{4}{9}}=\frac{\sqrt{4}}{\sqrt{9}}$

ATTENTION : Cette propriété n'est pas vraie pour l'addition !!!!

En effet : $\sqrt{36+64}\neq\sqrt{36}+\sqrt{64}$

Application : complète.

$\sqrt{(-3)^2} = \ldots..$	$\sqrt{(\ldots\ldots..)^2} = 49$	$\sqrt{0{,}01} = \ldots\ldots$
$\sqrt{\ldots\ldots.} = 0{,}2$	$-\ \sqrt{(-3)} = \ldots\ldots.$	$\dfrac{\sqrt{9}}{\ldots.} = \dfrac{1}{2}$
$5\sqrt{3} = \sqrt{\ldots\ldots\ldots..}$	$3a\sqrt{5} = \sqrt{\ldots\ldots\ldots}$	$6x^3\sqrt{2x} = \sqrt{\ldots\ldots.}$

5. Simplification de radicaux

Si le radicand n'est pas un carré parfait, il est peut-être possible malgré tout de le simplifier en utilisant les propriétés ci-avant.

On peut faire apparaître dans le radical des facteurs carrés parfaits, afin de les extraire du radical.

Exemples : $\sqrt{48} = \sqrt{3.\underline{16}} = 4\sqrt{3}$ $\qquad$ $\sqrt{8a^5} = \sqrt{2.\underline{4}.a.\underline{a^4}} = 2a^2\sqrt{2a}$

Si le radicand est un grand nombre, il est conseillé de le décomposer en facteurs premiers. Exemple : $\sqrt{1080} = \sqrt{2^2.2.3^2.3.5} = 2.3.\sqrt{2.3.5} = 6.\sqrt{30} = 6\sqrt{30}$

A retenir !

Quel que soit le nombre positif a,

$$\sqrt{a^2} = a \quad \text{et donc} \quad \left(\sqrt{a}\right)^2 = a \quad \text{car} \quad \sqrt{a}.\sqrt{a} = \sqrt{a.a} = \sqrt{a^2} = a$$

Exercices : simplifie les radicaux suivants :

$\sqrt{72} =$	$\sqrt{32} =$	$\sqrt{125} =$
$\sqrt{63} =$	$\sqrt{56} =$	$\sqrt{98} =$
$\sqrt{18} =$	$\sqrt{360} =$	$\sqrt{162} =$
$7\sqrt{75} =$	$4\sqrt{24} =$	$3\sqrt{550} =$

$\sqrt{a^4b^3c^7} =$ $\qquad$ $\sqrt{x^{11}y^6z^8} =$ $\qquad$ $\sqrt{m^{10}p^2t^9} =$

$\sqrt{7^2} =$ $\qquad$ $\sqrt{6^3} =$ $\qquad$ $\sqrt{5^4.2^7} =$

$\sqrt{1575} =$ $\qquad$ $\sqrt{392} =$ $\qquad$ $\sqrt{1089} =$

$3x^3\sqrt{63x^7} =$ $\qquad$ $5a\sqrt{75a^9} =$ $\qquad$ $2x\sqrt{8x^{12}} =$

B. Racines cubiques

1. Définition

La racine cubique d'un nombre *a*, notée $\sqrt[3]{a}$, est le nombre *x* dont le cube vaut *a*.

Soit $\sqrt[3]{a} = x \Leftrightarrow x^3 = a$

Exemples :

$\sqrt[3]{8} = 2 \;\; car\, 2^3 = 8$ $\qquad$ $\sqrt[3]{0} = 0 \;\; car\, 0^3 = 0$

$\sqrt[3]{-64} = -4 \;\; car\, (-4)^3 = -64$ $\qquad$ $\sqrt[3]{1} = 1 \;\; car\, 1^3 = 1$

Remarque : le radicand d'une racine cubique peut être positif ou négatif, contrairement à celui d'une racine carrée.

2. Exercices

A connaître !

Rappel : **les cubes des 11 premiers nombres naturels.**

0^3= …….	3^3 = ……	6^3 = ……	9^3 = ……
1^3 = ……	4^3 = ……	7^3 = ……	10^3 = …….
2^3 = ……	5^3 = ……	8^3 = ……	

1) Simplifie les radicaux numériques suivants.

$\sqrt[3]{27} =$

$\sqrt[3]{-1} =$

$\sqrt[3]{32} =$

$\sqrt[3]{-125} =$

$\sqrt[3]{375} =$

$\sqrt[3]{-0,008} =$

$\sqrt[3]{216} =$

$\sqrt[3]{81} =$

$\sqrt[3]{\frac{1}{8}} =$

$\sqrt[3]{-\frac{64}{27}} =$

$\sqrt[3]{0,027} =$

$\sqrt[3]{0,000001} =$

2) Simplifie les radicaux littéraux suivants.

$\sqrt[3]{x^3} =$

$\sqrt[3]{8a^6} =$

$\sqrt[3]{-0,125b^3c^9} =$

$\sqrt[3]{\frac{27x^{12}}{1000y^{21}}} =$

$\sqrt[3]{x^4} =$

$\sqrt[3]{a^5b^2} =$

$\sqrt[3]{-343a^7bc^3} =$

$\sqrt[3]{16xy^3} =$

C. Situation problème

Tes parents souhaitent placer une citerne cubique dans le jardin. Dans un catalogue en ligne, ils en trouvent une d'une contenance de 1331 litres.
Aide-les à calculer la surface du jardin qui sera occupée par cette citerne. Ecris tout ton raisonnement et tous tes calculs.