Puissance de nombres entiers

I. THEORIE

1. Vocabulaire

L'expression a^n est une puissance dont a est la ***base*** *et n l'****exposant****.*

2. Règles de signes des puissances

2.1. Toute puissance d'un nombre positif est un nombre positif.
2.2. Toute puissance paire d'un nombre négatif est un nombre positif.
2.3. Toute puissance impaire d'un nombre négatif est un nombre négatif.

3. Propriétés des puissances

3.1. Produit de puissances de même base

Pour multiplier des puissances de mêmes bases, on conserve la base et on additionne les exposants.

Si a$\in \mathbb{Z}$ et si m, n $\in \mathbb{N}$, alors $a^m.a^n = a^{m+n}$

3.2. Puissance d'une puissance

Pour élever une puissance a une autre puissance, on conserve la base et on multiplie les exposants.

Si a$\in \mathbb{Z}$ et si m, n $\in \mathbb{N}$, alors $(a^m)^n = a^{m.n}$

3.3. Puissance d'un produit

Pour élever un produit de facteurs à une puissance, on élève chaque facteur à cette puissance.

Si a$\in \mathbb{Z}$ et si m $\in \mathbb{N}$, alors $(a\,.\,b)^m = a^m.b^m$

4. ***Notation scientifique***

4.1. Méthode

Etape 1 *Décomposition de chaque facteur en notation scientifique*
Etape 2 *Réponse suivant les propriétés des puissances*
Etape 3 *Transformation de la réponse en notation scientifique avec la décomposition*
Etape 4 *Réponse finale en notation scientifique*

4.2. Exemple

$300 \,.\, 60\,000$

=	$\underline{3} \,.\, \underline{\underline{10^2}} \,.\, \underline{6} \,.\, \underline{\underline{10^4}}$	*(E1*	*Décomposer)*
=	$18 \,.\, 10^6$	(*E2*	*Appliquer la formule* $a^m . a^n = a^{m+n}$)
=	$1{,}8 \,.\, 10^1 \,.\, 10^6$	*(E3*	*Transformer* 18 *en notation scientifique)*
=	$1{,}8 \,.\, 10^7$	*(E4*	*Notation scientifique finale – Application de formule, voir E2)*

II. EXERCICES

1. Formules

1.1. Complète les formules des puissances.

- *Si m < n,* $\frac{a^m}{a^n} =$ _______
- *Si c > b,* $\frac{a^c}{a^b} =$ _______
- $a^x . a^y =$ _______
- $(a \,.\, b)^m =$ _______
- $a^{t^u} =$ _______

1.2. Justifie cette égalité par une propriété mathématique.

$$x^3 . x^8 = x^{11}$$

____

1.3. Lors d'une interrogation, Lina s'est trompée et a écrit : $(2b)^3 = 2b^3$

- *Ecris la réponse correcte.* $(2b)^3 =$ _________
- *Justifie par une formule.* _________________

2. Traduire un énoncé

2.1. Relie chaque expression à sa/ses traduction(s) mathématique(s) si $n, t \in \mathbb{N}$.

Somme de deux nombres naturels consécutifs •	• $2n + (2n + 2)$
	• $2t$
Double d'un nombre naturel •	• $n + (n + 1)$
	• $2n + (2n - 2)$
Somme de deux nombre naturel pair consécutifs •	• $2n$
	• $(n - 1) + n$
Somme du produit de deux nombres et du double de leur différence •	• $2.(nt + n - t)$
	• $nt + 2.(n - t)$

2.2. Complète le tableau par l'expression ou la traduction mathématique qui convient. ($n, t \in \mathbb{N}$)

Différence du quotient du produit de deux nombres naturels consécutifs par leur quadruple et du produit du carré d'un naturel par huit.	
	$3.n\,.(n-1).(n+1)+2.\frac{7n}{n^2}$
Somme de 7 nombres consécutifs	
	$\frac{(2n)+(2n+2)+(2n-2)}{n-(n+1)}$

3. Notation scientifique

3.1. Sans écrire un raisonnement détaillé, écris en notation scientifique.

- 250 000 000 = ______________________________
- 0, 0000000009 = ___________________________
- 15840269741268 = _________________________
- 81,2 = ____________________________________

3.2. Ecris en notation scientifique. Justifie par un raisonnement.

- 25 . 60 =

____

____

- 10000 . 12000 =

____

____

- 0, 0000005 . 60000 =

____

____

- $0,0008 \,.\, 0,0000008 =$

  ____

  ____

3.3. *Calcule et donne la réponse sous la forme d'une notation scientifique.*

- $2^2 \,.\, (10 + 15) =$ ____________________ = ________________
- $3^2 + 1091 =$ ______________________ = ________________

3.4. *Complète le tableau.*

Données	*Nombre et unité*	*Produit d'un naturel par une puissance de 10*	*Notation scientifique*
Diamètre d'une bactérie			$3 \,.\, 10^{-2}$
Age de la terre	4, 5 milliards d'années		
23 micromètres		$23 \,.\, 10^{-6}$	
Altitude du Mont-Blanc	4800 mètres		

4. ***Application de formules – Calculer de puissances***

4.1. *Ecris l'exposant qui convient.*

- $(a^2)^3 = a^{\cdots}$
- $a^4.a^8 = a^{\cdots}$
- $2^2.3^2 = 18^{\cdots}$
- $(\frac{4}{4})^5 = 1^{\cdots}$
- $\frac{32^{29}}{32^{18}} = 32^{\cdots} = (2^{\cdots})^{\cdots} = 2^{\cdots}$
- 24^9 est le produit de 24^9 et $24^{\cdots}$.
- 8^{14} est le produit de 8^9 et $8^{\cdots}$.
- Le triple de 3^{25} est $3^{\cdots}$

4.2. *Calcule et écris le la réponse sans exposant.*

- $10^2.10^3 10^{-2} =$ ________________
- $5^2.2^2.2^3 =$ ________________

- $5\,.\,10^2 + 4\,.\,10^3 =$ ___________________
- $\frac{12\,.10^{10}}{12.10^8} =$ ___________________________

4.3. *Calcule la valeur numérique de l'expression $2x^2 - 3x + 1$. Détaille ton raisonnement.*

Si $x = 4$	*Si* $x = (-\frac{1}{2})$

4.4. *Calcule la valeur numérique de ces expressions si $xy = 3$.*

- $4\,.\,(xy)^3\,.\,(-2) =$ ____
- $(2x\,.\,5y)^2 =$

  ____

  ____

4.5. *Effectue. (Simplifie au maximum.)*

- $(-2)^4 =$
- $-2^2 =$
- $(-2x)^2 =$
- $(-5xy)^0 =$
- $(\frac{a}{4})^3 =$
- $(4ab)^3 =$
- $\frac{w^5}{w^2} =$
- $4\,.\,x^2.\,x^5 =$
- $(x^4)^2 =$

- $(\frac{3a}{-b})^4 =$
- $\frac{-a^4}{3a} =$
- $\frac{-5x^7}{x^2} =$
- $(2x^5)^7 =$
- $\frac{(3x^2)^4}{(a^3b)^4} =$
- $(\frac{-2a^3x^3}{3aa^2bdx})^2 =$

5. Problèmes

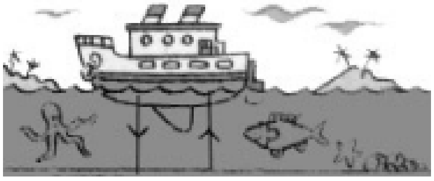
COMMENT RÉSOUDRE UN PROBLÈME ?

A. *Lire l'énoncé.*
B. *Surligner les **données** dans l'énoncé.*
C. *Souligner la **tâche** à accomplir, ce qui est demandé de calculer.*
D. *Diviser son raisonnement en 3 parties : **DONNEES – INCONNUE – CALCUL.***
E. ***Regrouper les données** ensemble et les simplifier si nécessaire.*
F. *Identifier l'inconnue et réfléchir à la résolution.*
G. ***Calculer.***
H. *Quand la réponse est trouvée, rédiger une **phrase de solution** comprenant la **réponse finale** et **les mots de l'énoncé/tâche**.*

5.1. Notation scientifique

Les réserves d'un gisement de gaz sont de 8 400 000 000 000 m^2. L'exploitation annuelle de ce gisement est de 200 000 000 000 m^3. Ecris ces nombres sous la forme de notation scientifique puis calcule le nombre d'années pendant lesquelles on pourrait exploiter ce gisement au même rythme.

5.2. *Dans l'eau le son se propage à environ $1{,}5 \,.\, 10^3$ · mètres par seconde. Le sondeur d'un navire envoie une onde sonore. Il reçoit son écho 0,4 seconde plus tard. (C'est le temps nécessaire à l'onde pour aller se réfléchir sur le fond de la mer et revenir au navire.) Quelle est la profondeur de l'eau sous le navire ?* ***(Conseil : Règle de trois)***



5.3. *La lumière parcourt environ 5 3·10 kilomètres par seconde. La distance du Soleil à la Terre est d'environ 1,5 108 · kilomètres. Combien de temps la lumière met-elle pour parcourir la distance du Soleil à la Terre ?* ***(Conseil : Règle de trois)***

5.4. *<u>Monsieur Babille au cours d'un voyage a entendu une rumeur...</u>*

Le 1er jour de son retour dans la ville de Racontar il répète cette rumeur à trois personnes. Le 2ème jour chacune des trois personnes met au courant trois nouvelles personnes.
Les jours suivants, la diffusion de la rumeur se poursuit de la même manière dès qu'une personne l'apprend, elle en informe trois autres dès le lendemain.

A. *Combien de personnes apprennent la rumeur le 3ème jour ? Justifie par un calcul.*

B. *Écris le calcul permettant de trouver combien de personnes apprennent la rumeur le 10ème jour. (On ne demande pas d'effectuer le calcul.)*

C. *Écris le calcul permettant de trouver combien de personnes apprennent la rumeur le 18ème jour. (On ne demande pas d'effectuer le calcul.)*

D. *En proposant un codage qui permette d'écrire les calculs ci-dessus de manière condensée, trouve une formulation générale.*