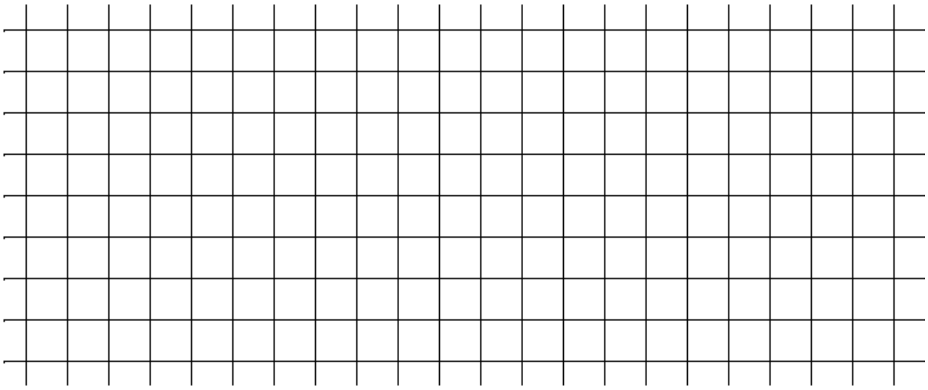
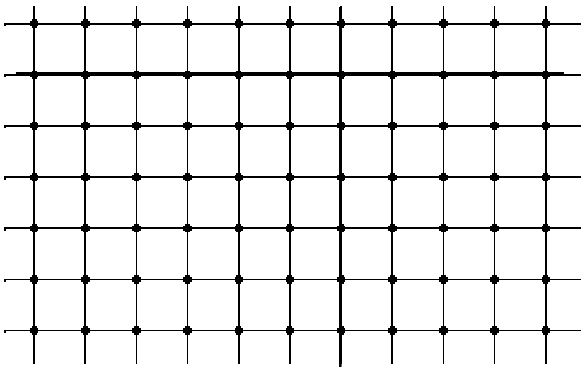
Calculer des aires sur un réseau de points

1. Mise en situation

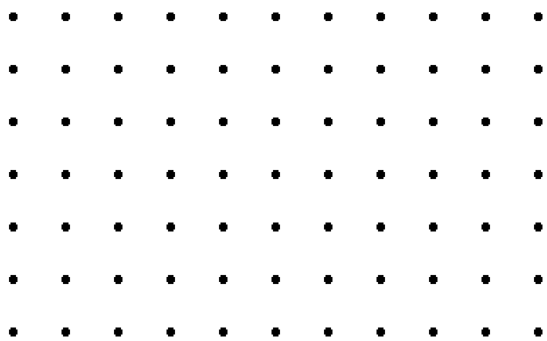
➢ Voici un ensemble de droites horizontales et verticales régulièrement espacées et dessinées ci-dessous.



➢ Les points d'intersection d'une verticale et d'une horizontale forment un ensemble de points.



➢ On considère seulement les points et obtient un **réseau** de points.

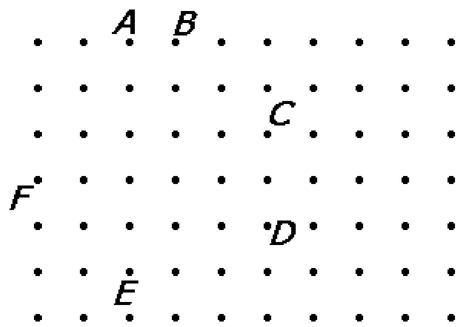


➢ C'est sur ce réseau que vous allez **dénombrer (compter)** un nombre de points pour calculer ensuite **l'aire** d'une figure.

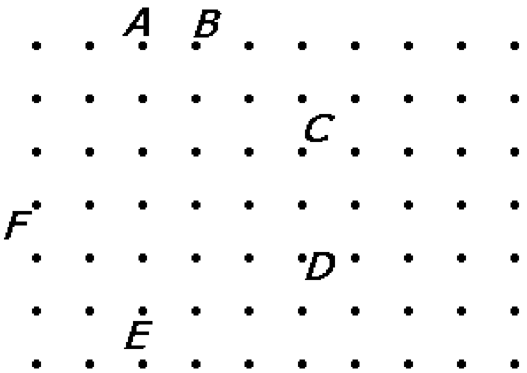
Page 1 : calculer des aires sur un réseau et introduction de la propriété de Pythagore.

2. <u>Dénombrons des points et calculons l'aire de polygones</u>

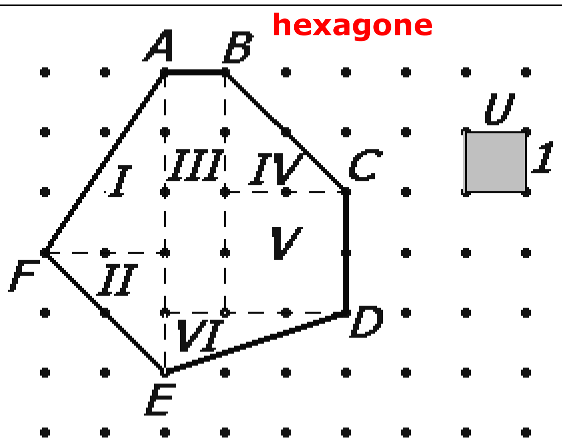
➢ Voici un réseau de points sur lequel on a marqué les points A, B, C, D, E, F.



➢ Sur la figure ci-dessous, construis le polygone ABCDEF. Ecris-y son **nom**. Dénombre ensuite **b** le nombre de points sur le bord du polygone et **i** le nombre de points contenus à l'intérieur du polygone. Ecris-y ensuite les résultats et calcule finalement $i + \frac{b}{2} - 1$

<table>
<tr><td rowspan="3"></td><td>b : <u>nombre de points du bord</u>
9</td></tr>
<tr><td>i : <u>nombre de points à l'intérieur</u>
13</td></tr>
<tr><td>$i + \frac{b}{2} - 1 = \mathbf{13 + \frac{9}{2} - 1 = 16,5}$</td></tr>
</table>

➢ Tu vas calculer ensuite l'aire d'ABCDEF en calculant l'aire des figures qui composent ABCDEF et comparer avec $i + \frac{b}{2} - 1$

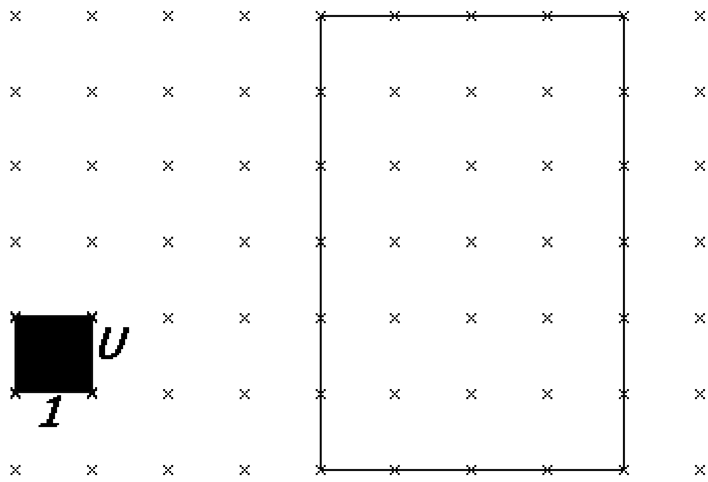
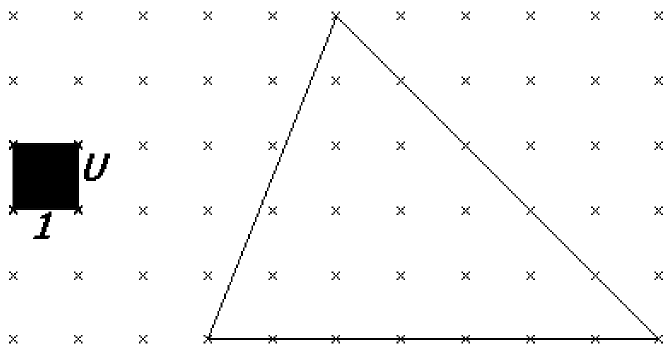
<table>
<tr><td></td><td>Aire de I : $\mathbf{\frac{2.3}{2} = 3}$
Aire de II : $\mathbf{\frac{2.2}{2} = 2}$
Aire de III : 1.4 = 4
Aire de IV: $\mathbf{\frac{2.2}{2} = 2}$
Aire de V: $\mathbf{2^2 = 4}$
Aire de VI : $\mathbf{\frac{1.\ 3}{2} = 1,5}$
Aire de ABCDEF : S = 16,5</td></tr>
</table>

Page 2 : calculer des aires sur un réseau et introduction de la propriété de Pythagore.

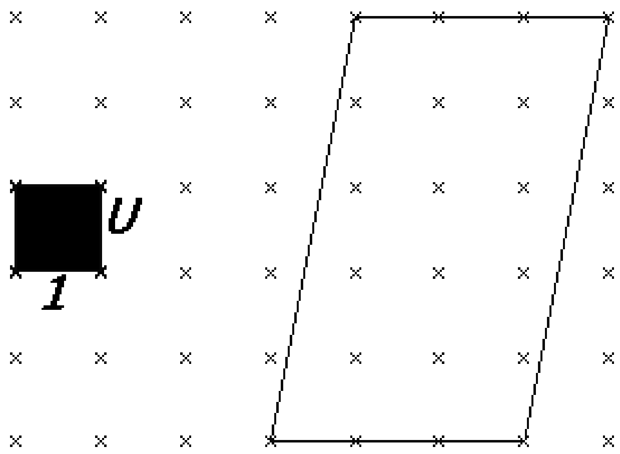
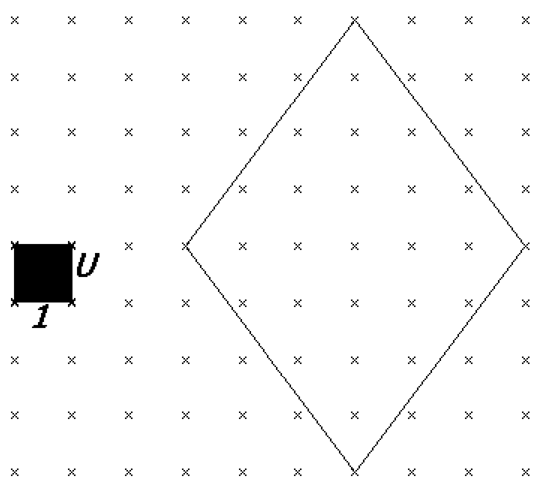
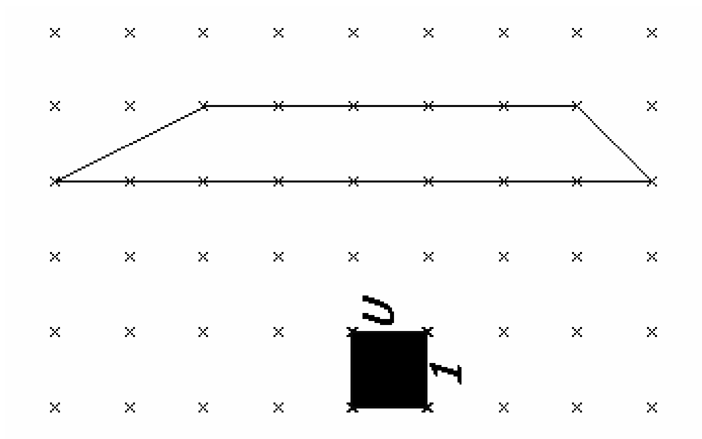
3. **<u>Recherche d'une relation qui lie S, i et b</u>**

- Nous allons chercher une relation qui lie S, i et b.
- Voici des polygones construits sur des réseaux de points (voir dessins ci-dessous)
- Pour chaque dessin, vous allez calculer l'**aire S** du polygone (par les formules classiques connues), dénombrer **i le nombre de points à l'intérieur du polygone** et **b le nombre de points sur le bord du polygone.**
- Vous écrivez chaque fois les résultats obtenus à côté de chaque dessin.

4. **<u>Les dessins</u>**

a)  	**S = 4.6= 24** **i = 15** **b = 20** **nature du polygone :** **rectangle**
b)  	**$S = \frac{7.\ 5}{2} = 17,5$** **i = 12** **b = 13** **nature du polygone :** **triangle**

Page 3 : calculer des aires sur un réseau et introduction de la propriété de Pythagore.

c) 	$S = 3.5 = 15$ $i = 12$ $b = 8$ **nature du polygone :** **parallélogramme**
d) 	$S = \frac{8.6}{2} = 24$ $i = 23$ $b = 4$ **nature du polygone :** **losange**
e) 	$S = \frac{8+5}{2} . 1 = 6,5$ $i = 0$ $b = 15$ **nature du polygone :** **trapèze**

Page 4 : calculer des aires sur un réseau et introduction de la propriété de Pythagore.

5. La relation mathématique

- Complète le tableau suivant en tenant compte des résultats de la page 2. et des résultats des pages 3 et 4.

- Tableau

Dessins	**i**	**b**	**S**	$\frac{b}{2}$	$i + \frac{b}{2}$	$i + \frac{b}{2} - 1$
a)	15	20	**24**	10	25	**24**
b)	12	13	**17,5**	6,5	18,5	**17,5**
c)	12	8	**15**	4	16	**15**
d)	23	4	**24**	2	25	**24**
e)	0	15	**6,5**	7,5	7,5	**6,5**
Résultats page 2	13	9	**16,5**	4,5	17,5	**16,5**

- Observe chaque fois les résultats obtenus aux $4^{\text{èmes}}$ et $7^{\text{ème}}$ colonnes. Que constates-tu ?

Les résultats sont identiques

- Ecris la relation mathématique qui exprime l'aire S d'un polygone en tenant compte du nombre de points i à l'intérieur du polygone et du nombre b de points sur le bord.

la relation mathématique	$S = i + \frac{b}{2} - 1$ **(formule de Pick, uniquement valable si les sommets appartiennent à un réseau de points)**

Page 5 : calculer des aires sur un réseau et introduction de la propriété de Pythagore.

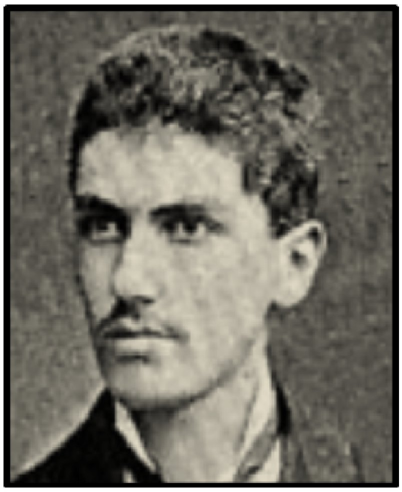
➢ <u>Note historique</u>

La relation mathématique écrite est celle trouvée par **G.A.Pick** dont voici une courte biographie.

Biographie

Georg Alexander PICK est né à Vienne le 10 août 1859.
Il étudie les mathématiques et la physique à l'université de Vienne de 1875 à 1879 et obtient, en 1880, le grade de Docteur de l'université de Vienne
En 1888, il est Professeur de mathématiques à l'université allemande de Prague.
En 1942, il est déporté et meurt le 26 juillet 1942 dans le camp de concentration de Theresienstadt.
Georg Alexander PICK a contribué de manière significative à l'analyse et à la géométrie différentielle en publiant près de 70 articles

site web de l'université de Rouen.

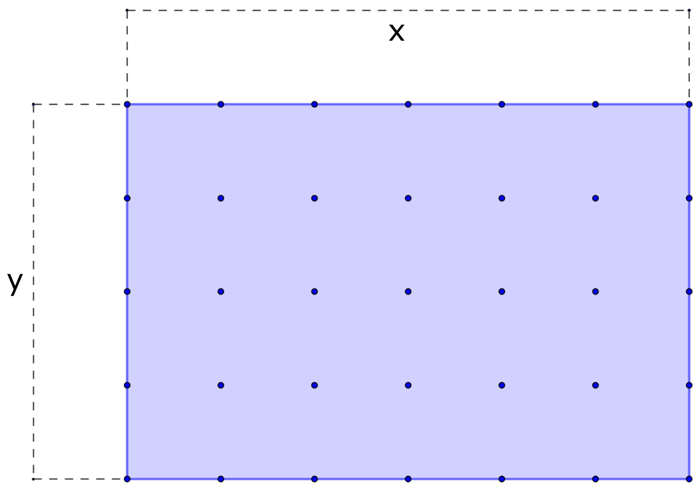


6. <u>Une démonstration de la formule de Pick pour le rectangle</u>

- Une relation mathématique vient d'être découverte. Normalement, il faudrait la démontrer pour un polygone quelconque dont les sommets appartiennent à un réseau de points. Cette démarche dépasse le cadre du cours de 3ème.

- Cependant, on peut la prouver pour un rectangle. Cette preuve est un excellent exercice pour pratiquer et justifier le calcul algébrique dont les élèves demandent inlassablement : « A quoi cela sert-il ? »

- Considérons un rectangle de longueur x et de largeur y dont les sommets appartiennent à un réseau de points.



Page 6 : calculer des aires sur un réseau et introduction de la propriété de Pythagore.

<u>Preuve</u>

a) Quel est le nombre de points qui sont sur une longueur sans tenir compte des extrémités ?

Il y a : $x - 1$ points.

b) Quel est le nombre de points qui sont sur une largeur sans tenir compte des extrémités ?

Il y a : $y - 1$ points.

c) Quel est le nombre de points qui sont sur deux longueurs et deux largeurs sans tenir compte des sommets du rectangle ?

Il y a : $2(x - 1) + 2(y - 1)$ points

En développant, on a : $2x - 2 + 2y - 2 = 2x + 2y - 4$

d) Quel est le nombre de points qui sont sur le contour du rectangle ?

Il y a $2x + 2y - 4 + 4$ points qui devient $2x + 2y$ (à quoi cette expression obtenue fait-elle penser, d'ailleurs ?)

e) Quel est le nombre de points qui sont sur une « rangée horizontale » contenue à l'intérieur du rectangle ?

Il y a $x - 1$ points.

f) Combien y-a-t-il de « rangées horizontales » contenue à l'intérieur du rectangle ?

Il y a $y - 1$ rangées.

g) Combien y-a-t-il de points à l'intérieur du rectangle ?

Il y a $(x-1)(y-1)$ points.

En développant, on a : $xy - x - y + 1$

h) Finalement, on a : $i + \frac{b}{2} - 1 = xy - x - y + 1 + \frac{2x + 2y}{2} - 1 =$

$xy - x - y + 1 + \frac{2(x + y)}{2} + 1 = xy - x - y + 1 + x + y - 1 = \mathbf{xy}$ (après simplification des opposés)

et **xy** est bien **l'aire** du rectangle.

(*Bien sûr, il faudra toute la pédagogie de l'enseignant pour arriver à faire digérer toutes les étapes de la démarche)*

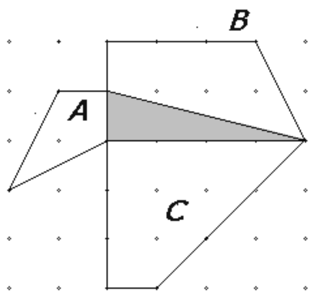
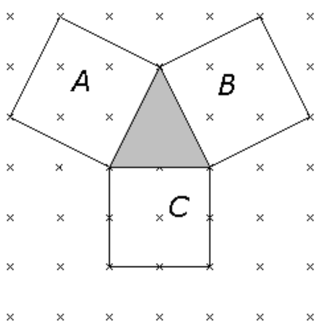
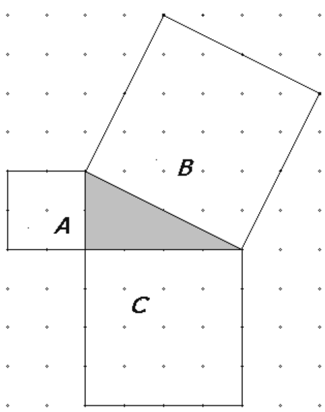
Page 7 : calculer des aires sur un réseau et introduction de la propriété de Pythagore.

- A titre d'exercice, démontrer la formule de Pick pour le carré en utilisant les identités remarquables. **(dans ce cas x = y et on peut refaire la preuve précédente soi-même)**

7. <u>Vers la relation de Pythagore</u>

- On peut se demander pourquoi passer son temps à voir la formule de Pick. Celle-ci peut être un excellent tremplin pour induire (la démonstration viendra après) la propriété de Pythagore.

- Voici des dessins de triangles coloriés en gris. Sur les côtés de ces triangles, on a construit des **polygones** A, B et C. On te demande de chercher la nature et l'aire de ces polygones directement ou en appliquant la formule de Pick. Chaque résultat obtenu sera consigné dans un tableau. Réponds ensuite aux questions.

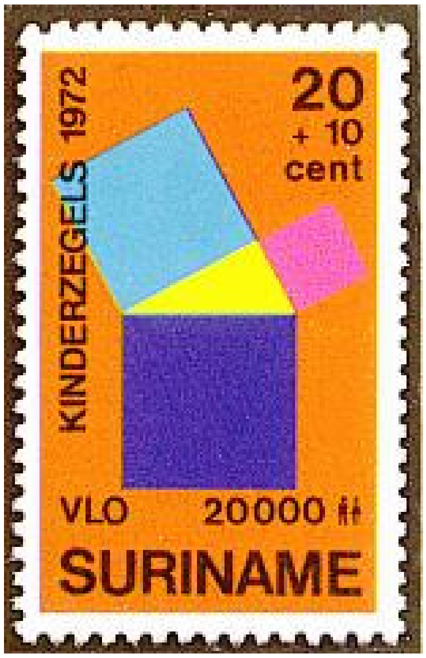
a) 	Nature et aire de A **cerf-volant** **$S = 1 + \frac{4}{2} - 1$** **$S = 2$**	Nature et aire de B **quadrilatère scalène** **$S = 3 + \frac{6}{2} - 1$** **$S = 5$**	Nature et aire de C **trapèze** **$\frac{4 + 1}{2} . 3 =$** **7,5**
b) 	Nature et aire de A **carré** **$S = 4 + \frac{4}{2} - 1$** **$S = 5$**	Nature et aire de B **carré** **$S = 4 + \frac{4}{2} - 1$** **$S = 5$**	Nature et aire de C **carré** **$S = 2^2$** **$S = 4$**
c) 	Nature et aire de A **carré** **$S = 2^2$** **$S = 4$**	Nature et aire de B **carré** **$S = 17 + \frac{8}{2} - 1$** **$S = 20$**	Nature et aire de C **carré** **$S = 4^2$** **$S = 16$**

Page 8 : calculer des aires sur un réseau et introduction de la propriété de Pythagore.

- Tu viens de calculer les aires de A, B et C dans chaque cas a), b), c). Pour **un** de ces cas, il y a moyen, sauf erreur de calcul, d'écrire **une relation simple mathématique** qui lie les aires calculées. Cette relation est la **propriété de Pythagore**. Complète le tableau ci-dessous.

relation simple qui lie les aires de A, B et C	nature de A, B et C	nature du triangle grisé
dessin c) pas a) et b) **20 = 16 + 4** **ou** **Aire de B = Aire de A + Aire de C**	**carrés**	**triangle rectangle**

- Voici des reproductions de timbres l'un pour la Grèce et l'autre pour le Surinam et qui célèbrent la **propriété de Pythagore**.



- Réponds ensuite aux questions.

a) Quel est le nom du polygone central et de ceux construits autour de ce polygone ?

un triangle rectangle et 3 carrés

b) Quel dessin du paragraphe précédent correspond à ceux des timbres ?

Page 9 : calculer des aires sur un réseau et introduction de la propriété de Pythagore.

le dessin c)

c) Pour la reproduction du timbre **grec**, dénombre les « petits carrés » contenus dans les grands carrés construits autour du triangle et écris une relation mathématique qui lie les nombres obtenus.

nombre de « petits carrés » contenus dans le carré A	nombre de « petits carrés » contenus dans le carré B	nombre de « petits carrés » contenus dans le carré C
25	**16**	**9**
la relation mathématique numérique : **25 = 16 + 9** ou Aire de **A** = Aire de **B** + Aire de **C**		

L'aire du carré construit sur l'hypoténuse d'un triangle rectangle est égale à la somme des aires des carrés construits sur les côtés de l'angle droit. (Propriété de Pythagore)