Chapitre 2 : Fonction et équation du deuxième degré

A. Résolution d'équation du second degré

Une **équation du second degré** en x est de type :

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Avec *a, b* et *c* étant des réels et *a* étant non nul

Jusqu'à présent, vous n'avez pas appris à résoudre ce type d'équation.
Résoudre cette équation revient à trouver les **racines** de la fonction $f(x) = ax^2 + bx + c$

Exercice 1

Les équations suivantes sont-elles des équations du second degré ?

1) $3x^2 - x + 5 = 0$
2) $3x^2 + 5 = 0$
3) $3x^2 - x = 0$
4) $3x^2 = 0$
5) $-x + 5 = 0$

1. Méthode de résolution générale

Pour résoudre l'équation $ax^2 + bx + c = 0$, il existe une méthode de résolution générale dont voici les étapes :

1) Calcul du **discriminant ou delta** $\Delta = b^2 - 4ac$

2) Calcul des solutions de l'équation :

- **Si** $\Delta > \mathbf{0}$ l'équation a **2 solutions** $x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$
- **Si** $\Delta = \mathbf{0}$ l'équation a **1 solution double** $x_1 = x_2 = \frac{-b}{2a}$
- **Si** $\Delta < \mathbf{0}$ l'équation n'a **pas de solution**

Exercice 2

Résous les équations suivantes

1) $x^2 + 3x + 2 = 0$
2) $x^2 - 9x + 18 = 0$
3) $3x^2 - 4x - 2 = 0$
4) $x^2 + 28 = 11x$
5) $3x^2 - x = \frac{9}{4}$
6) $x^2 + \frac{3}{2}x - 1 = 0$
7) $x^2 + 4x + 3 = 0$
8) $6x^2 - 5x - 4 = 0$
9) $x^2 + 5x = 6$
10) $35 - 2x = x^2$
11) $\frac{x^2}{4} + x = 0$
12) $x^2 - 3x - 4 = 0$
13) $12x^2 + 7x - 12 = 0$
14) $10x = x^2 + 13$
15) $9x^2 = -1 - 6x$
16) $x^2 - \frac{x}{6} - \frac{1}{3} = 0$
17) $\frac{x^2}{2} - 3 = 0$
18) $10x^2 + x - 3 = 0$
19) $8x^2 + x - 1 = 0$
20) $2 - 10x^2 - 3x = 0$
21) $-9x^2 - 5x + 9 = 0$
22) $6 + 2x - 2x^2 = 0$
23) $x + 6x^2 - 4 = 0$
24) $7x^2 - 7x - 6 = 0$
25) $-8x^2 + 8x - 7 = 5x + 6$
26) $(x+3)^2 = -8x^2 - x - 9$
27) $x^2 - 9x + 3 = (6x+7)(x+7)$
28) $(x-4)^2 = -5x^2 - 2x + 3$
29) $x^2 - x - 2 = (9x+1)(x+7)$

Entraine-toi Exercice 3 (supplémentaires)

2. Les diverses méthodes de résolutions d'équations du second degré

La méthode générale vue au point précédent n'est parfois pas la plus rapide. Il y a 5 méthodes de résolutions en fonction de la forme de l'équation de départ.

Méthode 1 : Equation sous forme de produit

Le premier membre est le produit de deux facteurs du premier degré, le second **membre est nul**

$$(mx+p)(nx+q)=0$$

Méthode : Le produit de deux nombres est nul si l'un de ces deux nombres est nul (règle du produit nul). On cherche alors la valeur de x qui annule la première parenthèse et la valeur de x qui annule la deuxième parenthèse. Il y donc deux solutions obtenues.

Exemple :

Méthode 2 : Equation sans terme indépendant

Equation sans terme indépendant donc **c=0**

$$ax^2+bx=0$$

Méthode : On met x en évidence. Il y a deux solutions, la première vaut 0 et la deuxième se trouve en égalant la parenthèse à 0.

Exemple :

Méthode 3 : Equation sans terme du premier degré

Equation avec **b=0**

$$ax^2+c=0$$

Méthode : On déplace le terme indépendant de l'autre côté de l'égalité. On isole x^2 en divisant les deux côtés par a. Et ensuite, on prend la racine carrée.

Exemples :

Méthode 4 : Le premier membre est un trinôme carré parfait

Pour rappel, un trinome carré parfait est le résultat des produits remarquables et ceux-ci peuvent s'écrirent comme une multiplication de deux parenthèses :

$$x^2 + 2ax + a^2 = (x+a)^2 = (x+a)(x+a)$$
$$x^2 - 2ax + a^2 = (x-a)^2 = (x-a)(x-a)$$

Et se résolvent donc comme au point 4.1

Et dans ce cas précis, nous obtenons à chaque fois deux solutions identiques, appellées solutions doubles.

Exemple :

Méthode 5 : Si on ne sait appliquer aucunes des méthodes précédentes : calcul du delta et des racines par la méthode générale

Exercice 4

Parmi les équations suivantes, cocher celles qui peuvent être résolues sans utiliser le discriminant Δ.

Série A

- ☐ $2x^2 - 3 = 0$
- ☐ $(2x-3)(x+1) = 0$
- ☐ $2x^2 + 3 = 0$
- ☐ $2x^2 - 9x + 9 = 0$
- ☐ $-2x^2 + 4x = 96$
- ☐ $-2x^2 + 4x = 0$
- ☐ $x^2 + 2x = 0$

Série B

- ☐ $-5x^2 - 4x = -270$
- ☐ $2x^2 + 9 = 0$
- ☐ $x^2 + 6x + 9 = 0$
- ☐ $x(x+3) = 0$
- ☐ $2x^2 - 13x + 15 = 0$
- ☐ $(2x-5)(x^2 - 7x + 11) = 0$
- ☐ $-5x^2 - 4x + 1 = 0$

Et ensuite résous-les.

Exercice 5

Résous avec la méthode la plus appropriée.

1. $1-2x^2=0$
2. $-5x^2=0$
3. $x^2+4x+4=0$
4. $12x-3x^2-12=0$
5. $8x+4x^2+3=0$
6. $5x^2+44=30x$
7. $(x-1)(2x-1)=3$
8. $-5-x^2=0$
9. $20x=2x^2+47$
10. $(2x-11)(1-x)=7$
11. $2+4x^2=0$
12. $-x^2-8x-18=0$
13. $4x^2-32x+63=0$
14. $x(-2x+8)=9$
15. $5+9x-2x^2=0$
16. $x(x-3)=10$
17. $1+2x^2+x=0$
18. $-3x^2+3=0$
19. $7x+20x^2=6$
20. $-8(10-x)=x^2-100$

Entraîne-toi

Exercice 6 (supplémentaires)
Exercice 7 (supplémentaires)
Exercice 8 (supplémentaires)

3. Somme et produit des solutions

Lorsque l'équation $ax^2+bx+c=0$ admet deux solutions distinctes ou confondues,

leur **somme** est $S=x_1+x_2=\frac{-b}{a}$

leur **produit** est $P=x_1.x_2=\frac{c}{a}$

a) Vérifier les solutions obtenues pour une équation du second degré

Lorsque nous avons résolu l'équation $x^2 - 3x - 10 = 0$, nous avions trouvé les solutions $x_1 = 1$ et $x_2 = 2$. Nous pouvons vérifier si nos réponses sont correctes en calculant la somme et le produit.

b) Connaissant une solutions en déduire la deuxième

L'équation $x^2 - 3x - 10 = 0$ a deux solutions dont l'une est -2. A partir de la formule de la somme OU de celle du produit nous pouvons déterminer l'autre solution.

Exercice 9

Calculer les solutions des équations suivantes ET vérifier-les.

1. $x^2 - 5x + 6 = 0$
2. $x^2 - 5x + 4 = 0$
3. $x^2 - 4x - 21 = 0$
4. $x^2 - 2x - 15 = 0$
5. $2x^2 - 8x - 10 = 0$
6. $x^2 + 6x + 8 = 0$
7. $x^2 - x - 6 = 0$
8. $x^2 - 2x - 8 = 0$
9. $-x^2 + 4x - 4 = 0$
10. $-3x^2 - 12x + 15 = 0$

Exercice 10

Trouve la deuxième solution des équations suivantes.

1. $x^2 - \sqrt{3}x - 2\left(2 + \sqrt{3}\right) = 0$ le nombre donné est -2
2. $-5x^2 + 18 = -x$ le nombre donné est 2
3. $x^2 + 2x - 3 = 0$ le nombre donné est 1
4. $x^2 - 7x + 12 = 0$ le nombre donné est 3
5. $2x^2 + 7x - 4 = 0$ le nombre donné est $\frac{1}{2}$
6. $6x^2 - 7x + 2 = 0$ le nombre donné est $\frac{2}{3}$
7. $4x^2 - 13x + 3 = 0$ le nombre donné est $\frac{1}{4}$
8. $2x^2 - 5\sqrt{2}x + 6 = 0$ le nombre donné est $\frac{3\sqrt{2}}{2}$

9. $\sqrt{2}x^2 - 3x + \sqrt{2} = 0$ — le nombre donné est $\sqrt{2}$

10. $x^2 - 3\sqrt{5}x + 10 = 0$ — le nombre donné est $\sqrt{5}$

11. $x^2 + ax - 2a^2 = 0$ — le nombre donné est $-2a$

12. $x^2 - (a+b)x + ab = 0$ — le nombre donné est a

Exercice 11

Calcule les solutions et vérifie-les (si possible).

1) $4x^2 + 2x = 0$
2) $3x = 5x^2$
3) $9x^2 = 49$
4) $(x - 24)(x + 2) = 0$
5) $x^2 + 10 = 0$
6) $(11x - 7)^2 = 36$
7) $(2x + 1)(3x - 5) + 5 = 0$
8) $5x^2 + 42x = 47$
9) $(x + 1)^2 - x - 1 = 0$
10) $2x^2 - 5 = 0$
11) $(2x - 1)(3 - x) = 0$
12) $x^2 - 4 = x + 2$
13) $x^2 + 16 = 8x$
14) $(6x + 2)^2 = 4 - 36x^2$
15) $3x^2 + 2x - 7 = 0$

Entraîne-toi

Exercice 12 (supplémentaires)

Exercice 13 (supplémentaires)

4. Factorisation

Nous connaissons déjà des méthodes de factorisation :

- les produits remarquables :

- la mise en évidence :

Si les deux méthodes précédentes ne fonctionnent pas pour un équation du second degré, il existe une troisième méthode:

Si $\Delta > 0$	$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$
Si $\Delta = 0$	$ax^2 + bx + c = a(x - x_0)^2$
Si $\Delta < 0$	$ax^2 + bx + c$ est non factorisable.

Exemples :

Exercice 14

Factoriser, si possible, les trinômes suivants :

1. x^2+2x+2
2. $6x^2+x-2$
3. x^2+x+1
4. x^2-2x-3
5. $4x^2+4x-3$
6. $-6x^2+19x-10$
7. $-2x^2-x-1$
8. $2x^2-9x-5$
9. $\frac{1}{2}x^2-12-\frac{5}{2}x$
10. $-x^2+x-\frac{1}{4}$

Exercice 15

Ecrire une équation du second degré qui admet les valeurs suivantes comme solution.

a) $x_1 = 2 \quad et \quad x_2 = 5$

b) $x_1 = -3 \quad et \quad x_2 = 1$

c) $x_1 = 0 \quad et \quad x_2 = -2$

d) $x_1 = -6 \quad et \quad x_2 = -3$

e) $x_1 = \frac{1}{2} \quad et \quad x_2 = 2$

f) $x_1 = 1 \quad et \quad x_2 = 1$

Entraîne-toi **Exercice 16 (supplémentaires)**

B. Fonction du second degré

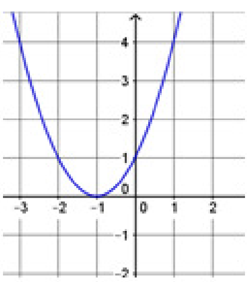
Une fonction du second degré est fonction ayant une équation du type :

$f(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$

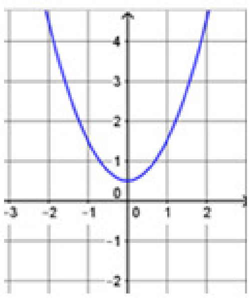
Remarques : 1) Elle est dite du second degré car son exposant le plus élevé est le carré.

2) Si $a = 0$, le terme du second degré disparait et on a alors une fonction du premier degré.

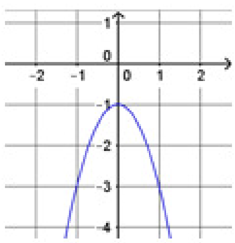
Graphiquement, la fonction du second degré est représentée par une parabole d'axe parallèle à l'axe des ordonnées et d'équation $y = ax^2 + bx + c$



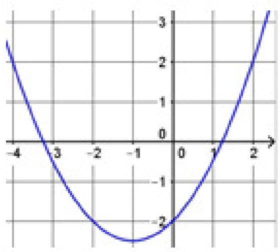
$y = x^2 + 2x + 1$



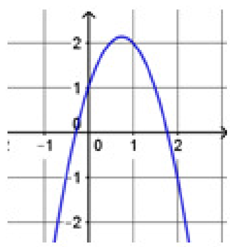
$y = x^2 + \frac{1}{2}$



$y = -2x^2 - 1$



$y = \frac{x^2}{2} + x - 2$



$y = -2x^2 + 3x + 1$

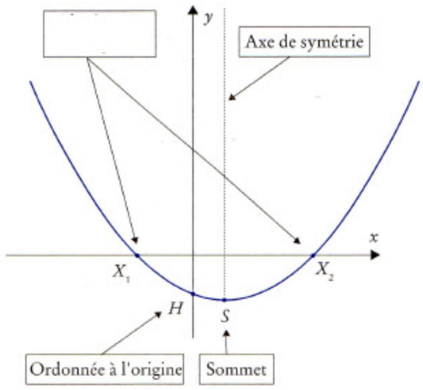
Une parabole est caractérisée par un sommet, un axe de symétrie, une concavité, des racines (pas toujours) et une ordonnée à l'origine.

Le **sommet** correspond au maximum ou minimum d'une parabole. Pour donner le sommet, on écrit ses coordonnées.

L'**axe de symétrie** d'une parabole est la droite verticale passant par le sommet. Elle a une équation du type
$y = a$bscisse

Pour rappel, les **racines** d'une fonction sont les abscisses des points d'intersection de la courbe avec l'axe des x.

Et **l'ordonnée à l'origine** est l'ordonnée correspondante au point d'intersection de la courbe avec l'axe des y.



GeoGebra

Avec l'aide de GeoGebra, déterminons le rôle de *a*, *b* et *c*.

a) Que se passe t'il lorsque que l'on fait varier a ?

b) Et en faisant varier *b* ?

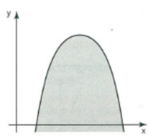
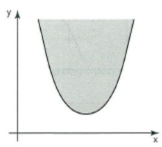
c) Quel est le rôle du paramètre *c* ?

d) Si $b = c = 0$?

e) Si $b = 0$

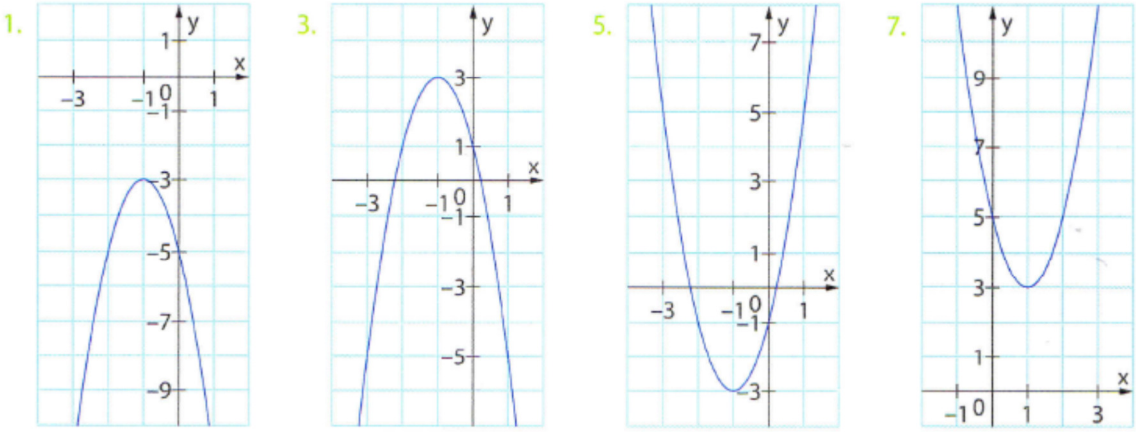
f) combien y a-t-il de racine ?

1 – La concavité

Soit la fonction $f : x \to ax^2 + bx + c$.	
$a < 0$	$a > 0$
La parabole, graphique de f, se présente de la manière suivante.	La parabole, graphique de f, se présente de la manière suivante.
	
Nous dirons que la parabole tourne sa **concavité** vers les ordonnées négatives (ou **vers le bas**).	Nous dirons que la parabole tourne sa **concavité** vers les ordonnées positives (ou **vers le haut**).

Exercice 17

Pour chacune des paraboles suivantes donnent la concavité, le sommet, les racines et l’axe de symétrie. Situe le sommet et les racines et trace l’axe de symétrie.



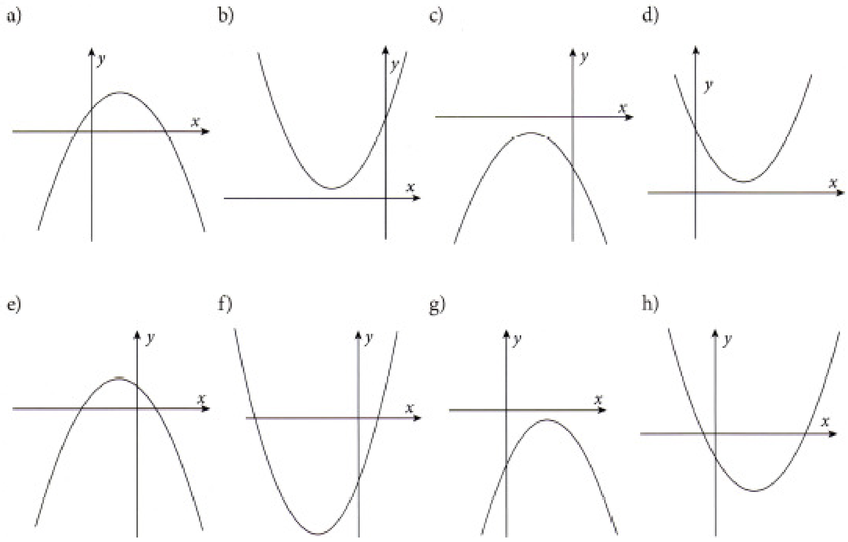
Entraîne-toi Exercice 18 (supplémentaires)

2 – L’ordonnée à l’origine

Exercice 19

Soit la fonction telle que $f(x)=-4x^2-3x+3$

Lequel des dessins suivants correspond à $f(x)$? Justifier.



3 – Les racines

Les racines se calculent en égalant l’entièreté de l’équation à 0 et en isolant ensuite le x.

$$f(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad ax^2 + bx + c = 0$$

Il s’agit donc de résoudre l’équation du second degré par une des 5 méthodes vues précédemment.

4 – L'axe de symétrie

Il est possible de déterminer l'équation de l'axe de symétrie d'une parabole en connaissant ses deux racines. De plus, l'axe de symétrie est une droite verticale, elle a donc une équation du type

$$axe \equiv x = constante.$$

La première racine se trouve en $x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et la deuxième en $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$

La distance séparant ces deux racines est donc

L'axe de symétrie d'une parabole $f(x) = ax^2 + bx + c$ a pour équation : $$x = \frac{-b}{2a}$$

5 – Le sommet

L'axe de symétrie passe par le sommet, nous savons donc que l'abscisse du sommet est………

Pour trouver l'ordonnée du sommet, nous déterminons l'image en …………………..

Les coordonnées du sommet d'une parabole $f(x) = ax^2 + bx + c$ sont

Exemple :

Trouvons les coordonnées du sommet de la parabole $f(x) = x^2 + 2x + 1$

Exercice 19

1. Soit la parabole $\mathcal{P} \equiv y = 3x^2 - 2x - 1$. Détermine
   a. l'équation de l'axe de symétrie,
   b. la coordonnée du sommet,
   c. les coordonnées des points d'intersection avec Ox,
   d. la coordonnée du point d'intersection avec Oy,
   e. la coordonnée du point d'abscisse 2,
   f. les coordonnées des points d'ordonnée 4.
2. Même question avec $\mathcal{P} \equiv y = 2x^2 - 3x - 5$.

Exercice 20

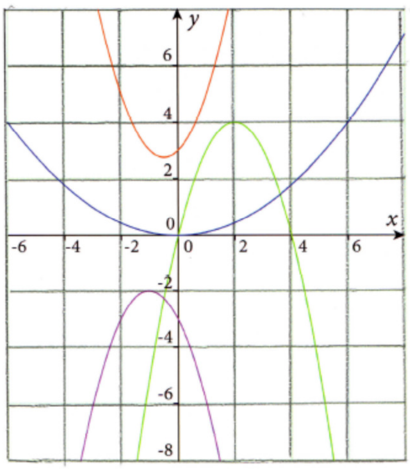
Considérer les représentations suivantes et quatre équations :

$P_1 \equiv y = x^2 + x + 3$

$P_2 \equiv y = -x^2 + 4x$

$P_3 \equiv y = -x^2 - 2x - 3$

$P_4 \equiv y = \frac{1}{9}x^2$

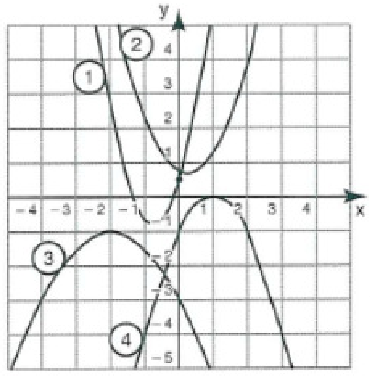


Déterminer, pour chacune des paraboles représentées, celle des équations qui la caractérise.

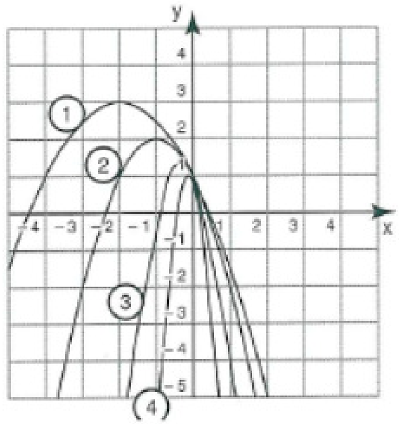
Exercice 21

Associe à chaque graphique l'équation de la parabole.

1. (A) $y = -0{,}5x^2 - 2x - 3$
   (B) $y = x^2 - 0{,}5x + 0{,}8$
   (C) $y = -x^2 + 2x - 1$
   (D) $y = 2x^2 + 3x + 0{,}5$



2. (A) $y = -0{,}5x^2 - 2x + 1$
   (B) $y = -3x^2 - 2x + 1$
   (C) $y = -x^2 - 2x + 1$
   (D) $y = -15x^2 - 2x + 1$



Exercice 22

Trace le graphique des paraboles suivantes en trouvant d'abord la concavité, le sommet, l'axe de symétrie, l'ordonnée à l'origine, les racines et un autre point quelconque.

1) $f(x) = x^2 - 4x + 3$
2) $f(x) = -x^2 + x - 1$
3) $f(x) = 0.5x^2 + 2$
4) $f(x) = -2x^2 + x - 3$
5) $f(x) = 2x^2 + 5x$
6) $f(x) = -x^2 + x + 1$

Exercice 23

Voici les équations de quatre fonctions :

1) $y = x^2 + 2x + 3$
2) $y = (x-1)^2 - 3$
3) $y = 2(x-1)(x-3)$
4) $y = -x^2 - 3x + 1$

Déterminer sans calcul mais en justifiant votre choix, quelle fonction :

a) a sa concavité vers le bas ?
b) coupe l'axe des x en 1 ?
c) coupe l'axe des y en 3 ?
d) a un sommet d'abscisse 1 ?

Entraîne-toi

Exercice 24 (supplémentaires)
Exercice 25 (supplémentaires)
Exercice 26 (supplémentaires)

6 – Etude de signe de la fonction du second degré

	$\Delta > 0$	$\Delta = 0$	$\Delta < 0$
$a > 0$			
$a < 0$			

Exercice 27

Réalise le tableau de signe des fonctions suivantes :

1) $2x^2 - 5x - 1$

2) $3 - x^2$

3) $-4x^2 + 4x - 1$

4) $4x^2 + x + 3$

5) $x^2 + x + 1$

6) $-6x^2 + 2x - 1$

7) $5x - 25x^2$

8) $x^2 + 8$

9) $-x^2 + 3x - 2$

10) $x^2 - 2x + 1$

Entraîne-toi

Exercice 28 (supplémentaires)

Problèmes

Exercice 29

La base d'un triangle vaut x cm, sa hauteur vaut (x-2) cm. Détermine la valeur de x pour que l'aire vaille 24 cm².

Exercice 30

Peut –on trouver trois carrés ayant pour côtés des entiers consécutifs et dont la somme des aires vaut 15 125 ?

Exercice 31

Un jardin public a la forme d'un carré de 8 mètres de côté. Il est traversé par 2 allées perpendiculaires de même largeur x. Retrouve x sachant que pour recouvrir ces allées, on a utilisé un camion de gravier habituellement utilisé pour recouvrir 15 m² de terrain.

Exercice 32

Le drapeau suivant est celui de la Finlande de dimensions 3 m sur 2 m.

Déterminer la largeur de la bande qu'il faut prendre pour que la surface bleue soit égale à la blanche.

Exercice 33

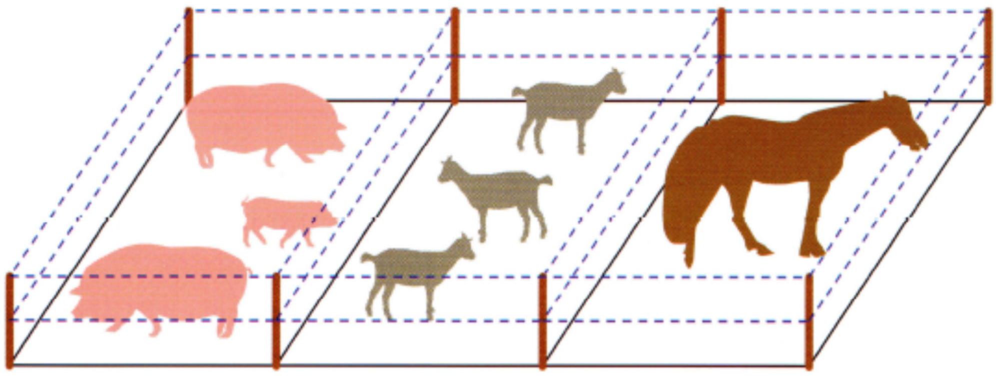
Plusieurs personnes se sont réunies pour fêter Noel.
Chaque personne a apporté trois cadeaux à chacune des autres personnes.
Sachant qu'au total 468 cadeaux ont été déposés près de l'arbre de Noël, combien de personnes y avait-il?

Exercice 34

Un brocanteur achète une caisse contenant un lot soldé de vases en verre blanc pour un total de 360€. Il constate qu'il y en a trois qui sont cassés. Il revend dons les autres vases en augmentant le prix d'achat de chaque vase de 5€. Il fait ainsi un bénéfice de 15€.Combien chaque vase lui avait-il coûté ?

Exercice 35

Un cultivateur possède 1600 m de fil avec lesquels il désire faire 3 enclos rectangulaires égaux contigus en utilisant 2 rangées de fil.



Quelles doivent être les dimensions d'un enclos pour que la superficie totale soit de 19,5 ares ?

NB : 1 are = 100m²

Exercice 36

Lucie est la cadette de la famille. Elle est de trois ans plus jeune que son frère Clément.
Sa sœur Justine a trois ans de plus que Clément. La baby-sitter, Hélène, est dix fois plus âgée que Lucie.
Le produit de l'âge de Lucie et d'Hélène est égal à celui de Justine et Clément.
Quel est l'âge de ces quatre personnes ?

Exercice 37

Des amis réservent ensemble leurs vacances au Club Med et choisissent la formule « all-in ». Ces vacances leurs coûteront 12000 euros.
Toutefois, ils constatent que pour un budget global de 13200 euros, ils pourraient offrir le séjour à quatre personnes supplémentaires s'ils prenaient la formule demi-pension. Cette formule coûte 400€ en moins par personne.
Combien de personnes composent le cercle d'amis ?
Quel est le prix de la formule « all-in » ?

Exercice 38

Un étudiant est persuadé que ses résultats scolaires dépendent du nombres d'heures quotidiennes (x) qu'il consacre à ses cours.
Ainsi il a établi que ses cotes (sur 100 points) dépendaient de la fonction $f(x) = -0.005x^2 + 0.4x + 21.25$
Pour vérifier la crédibilité de ce modèlen détermine s'il est possible d'obtenir une note négative.

Entraîne-toi

Exercice 39 (supplémentaires)
Exercice 40 (supplémentaires)
Exercice 41 (supplémentaires)
Exercice 42 (supplémentaires)
Exercice 43 (supplémentaires)