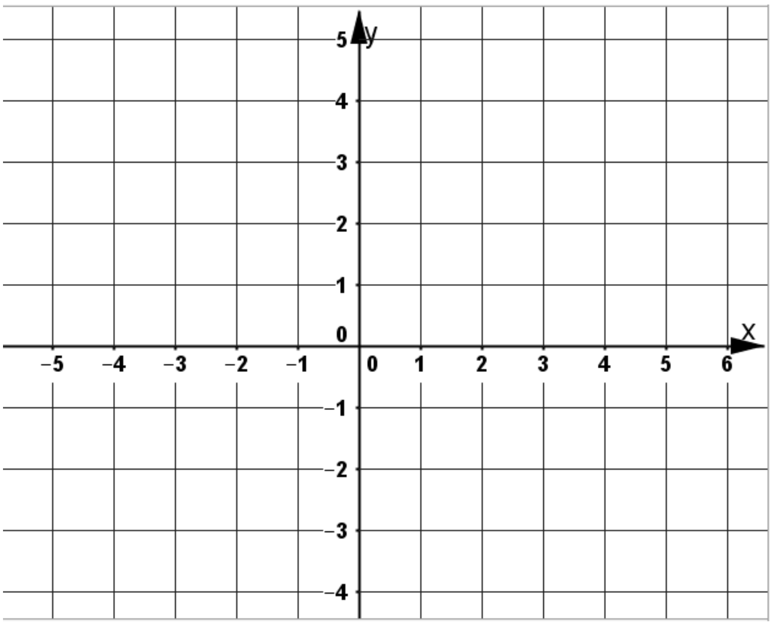
Chapitre 4 : Manipulations graphiques

1 – Les fonctions de référence

1.1 La fonction identité

$$\boldsymbol{f(x) = x}$$

Il s'agit de l'équation d'une droite passant par l'origine et de pente 1 ($y = mx + p$ avec $m = 1$ et $p = 0$).



x					
y					

Dom f :

Im f :

Racines :

OàO :

Croissance :

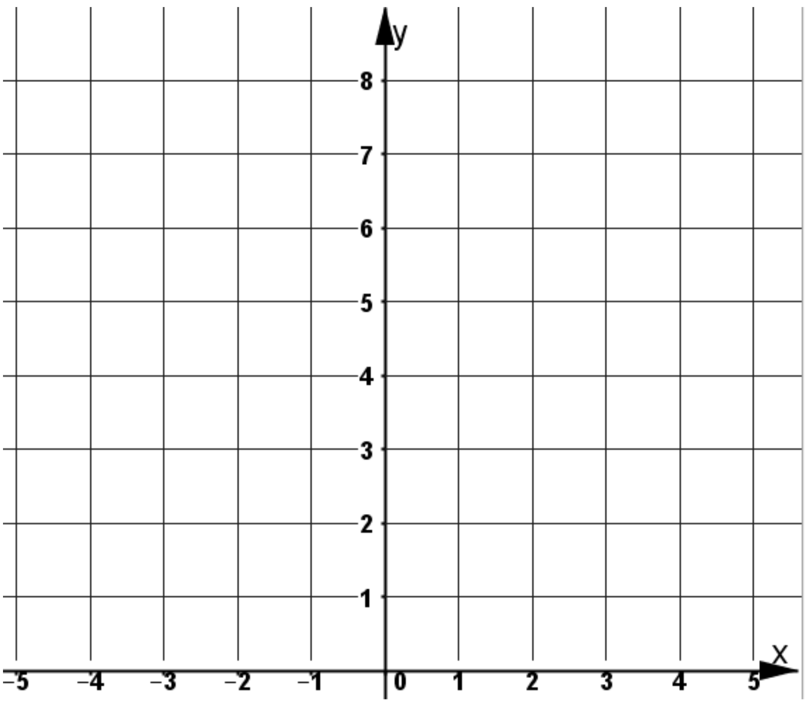
Extremum :

Parité :

1.2 La fonction carrée

$$\boldsymbol{f(x) = x^2}$$

Il s'agit de l'équation d'une parabole dont le sommet est à l'origine du repère et de concavité vers le haut ($y = ax^2 + bx + c$ avec $a = 1$ et $b = c = 0$).



x					
y					

Dom f :

Im f :

Racines :

OàO :

Croissance :

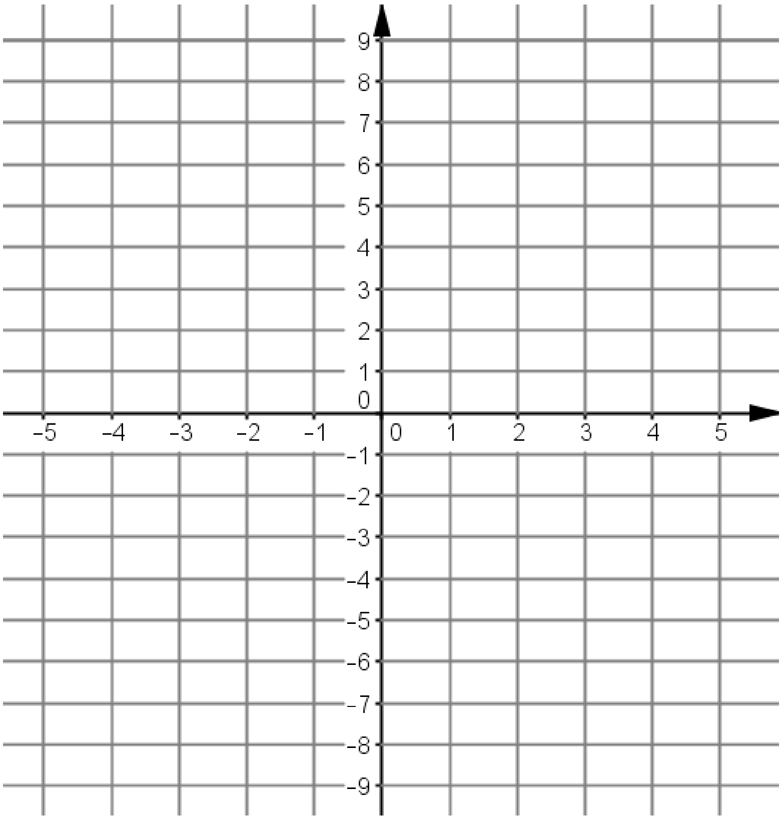
Extremum :

Parité :

Concavité :

1.3 La fonction cube

$$f(x) = x^3$$



x					
y					

Dom f :

Im f :

Racines :

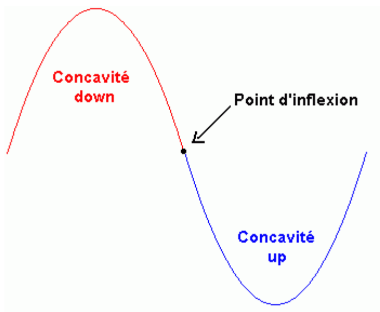
OàO :

Croissance :

Extremum :

Parité :

Concavité :



La fonction cube présente un **point d'inflexion**, il s'agit d'un point de la courbe où s'opère un changement de concavité.

Indique, en rouge, le point d'inflexion de la fonction cube.

1.4 La fonction valeur absolue

La valeur absolue d'un nombre *a*, noté |*a*| est égale à ce nombre s'il est positif et à son opposé si le nombre est négatif.

$$|a| = \begin{cases} a & si\ a > 0 \\ -a & si\ a < 0 \end{cases}$$

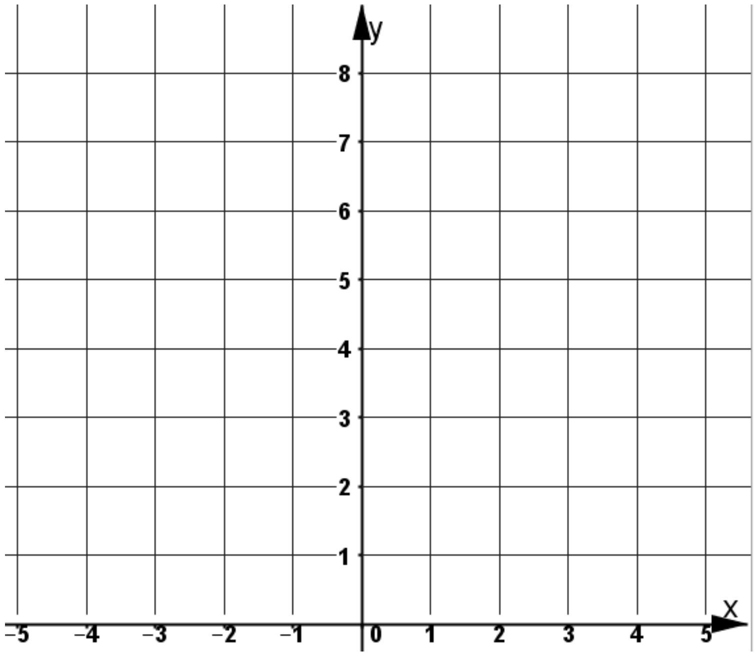
Exemples :

1) |3| =

2) |-5| =

3)|-0,241| =

$$\boldsymbol{f(x) = |x|}$$



x					
y					

Dom f :

Im f :

Racines :

OàO :

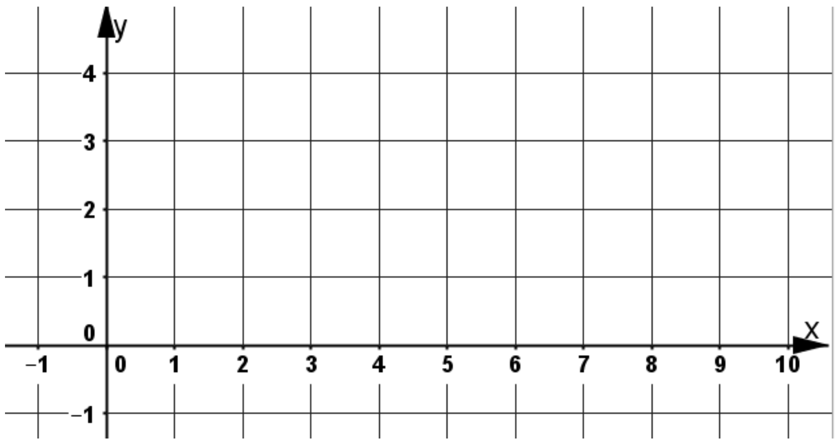
Croissance :

Extremum :

Parité :

1.5 La fonction racine carrée

$$\boldsymbol{f(x) = \sqrt{x}}$$



x					
y					

Dom f :

Im f :

Racines :

OàO :

Croissance :

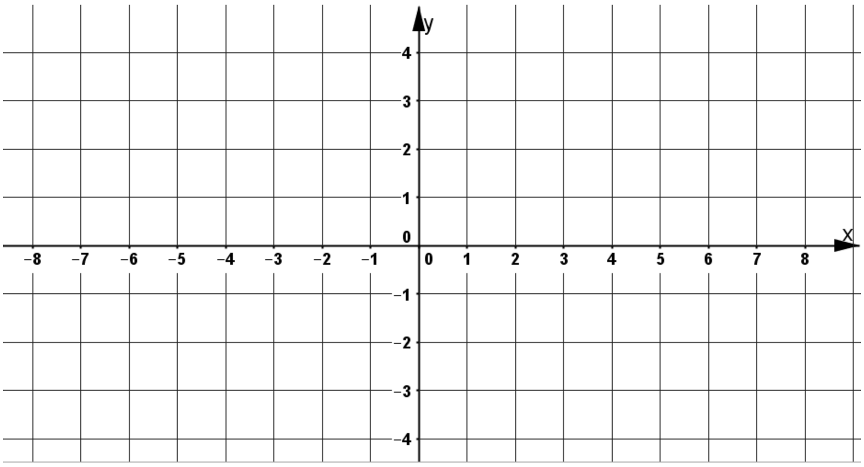
Extremum :

Parité :

Concavité :

1.6 La fonction racine cubique

$$f(x) = \sqrt[3]{x}$$



x					
y					

Dom f :

Im f :

Racines :

OàO :

Croissance :

Extremum :

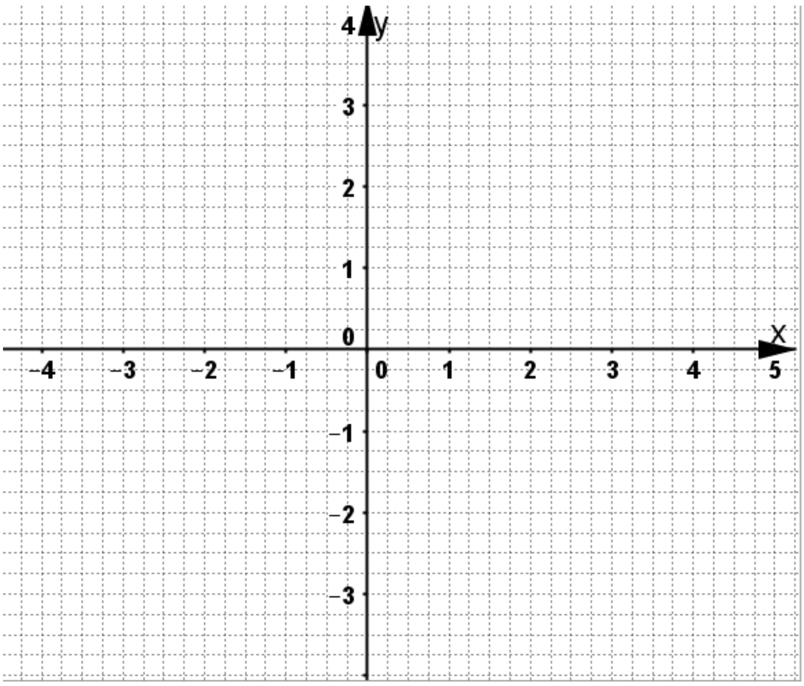
Parité :

Concavité :

Point d'inflexion :

1.7 La fonction inverse

$$f(x) = \frac{1}{x}$$



x						
y						

Dom f :

Im f :

Racines :

OàO :

Croissance :

Extremum :

Parité

Concavité

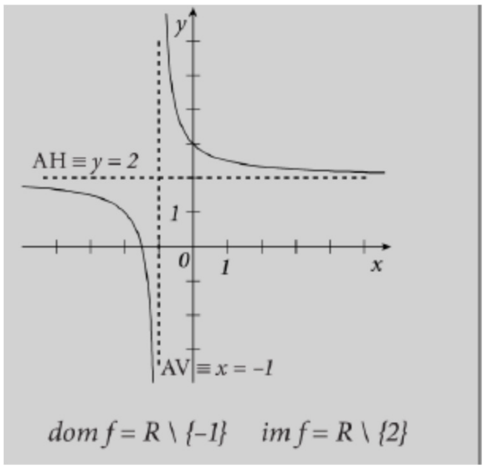
Point d'inflexion :

AV :

AH :

La fonction inverse présente des asymptotes.

Une **asymptote horizontale** au graphique d'une fonction est une droite, parallèle à l'axe x, qui est très proche du graphique de la fonction pour les valeurs de la variable x très grandes et/ou très petites.



L'asymptote horizontale est donc une droite horizontale qui longe la courbe sans jamais que les deux ne se croisent.

L'asymptote horizontale a toujours comme équation $\boldsymbol{AH \equiv y = valeur}$. Pour trouver cette valeur, on regarde pour quelle valeur l'asymptote coupe l'axe des ordonnée.

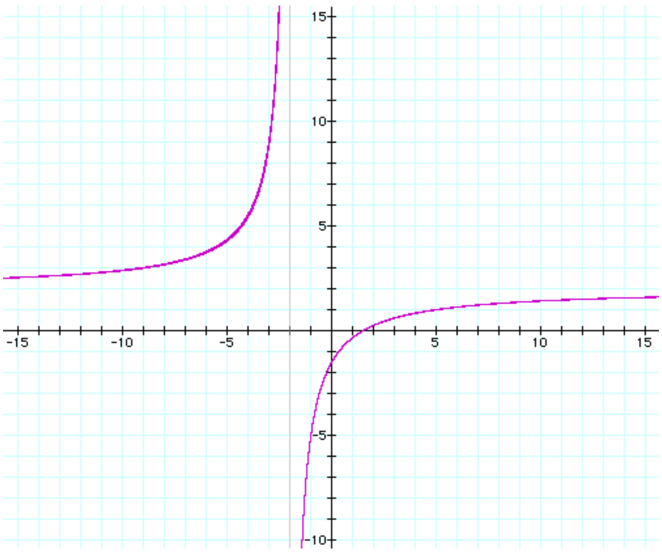
Une **asymptote verticale** au graphique d'une fonction est une droite, parallèle à l'axe y, qui est très proche du graphique de la fonction pour les valeurs de la variable x très proches de l'abscisse des points de cette droite.

L'asymptote verticale est donc une droite verticale qui longe la courbe sans jamais que les deux ne se croisent.

L'asymptote verticale a toujours comme équation $\boldsymbol{AV \equiv x = valeur}$. Pour trouver cette valeur, on regarde pour quelle valeur l'asymptote coupe l'axe des abscisses.

S'il y a une asymptote verticale (horizontale) alors cela veut dire que la fonction n'existe pas pour cette valeur d'abscisse (d'ordonnée) car la fonction ne peut pas couper cette ligne. Cela signifie qu'il faut exclure un point du domaine (de l'ensemble image).

Exemple :

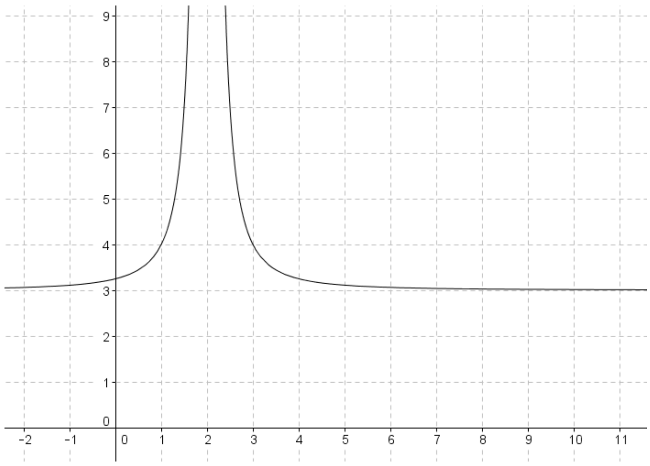


AH

AV

Dom f

Im f



AH

AV

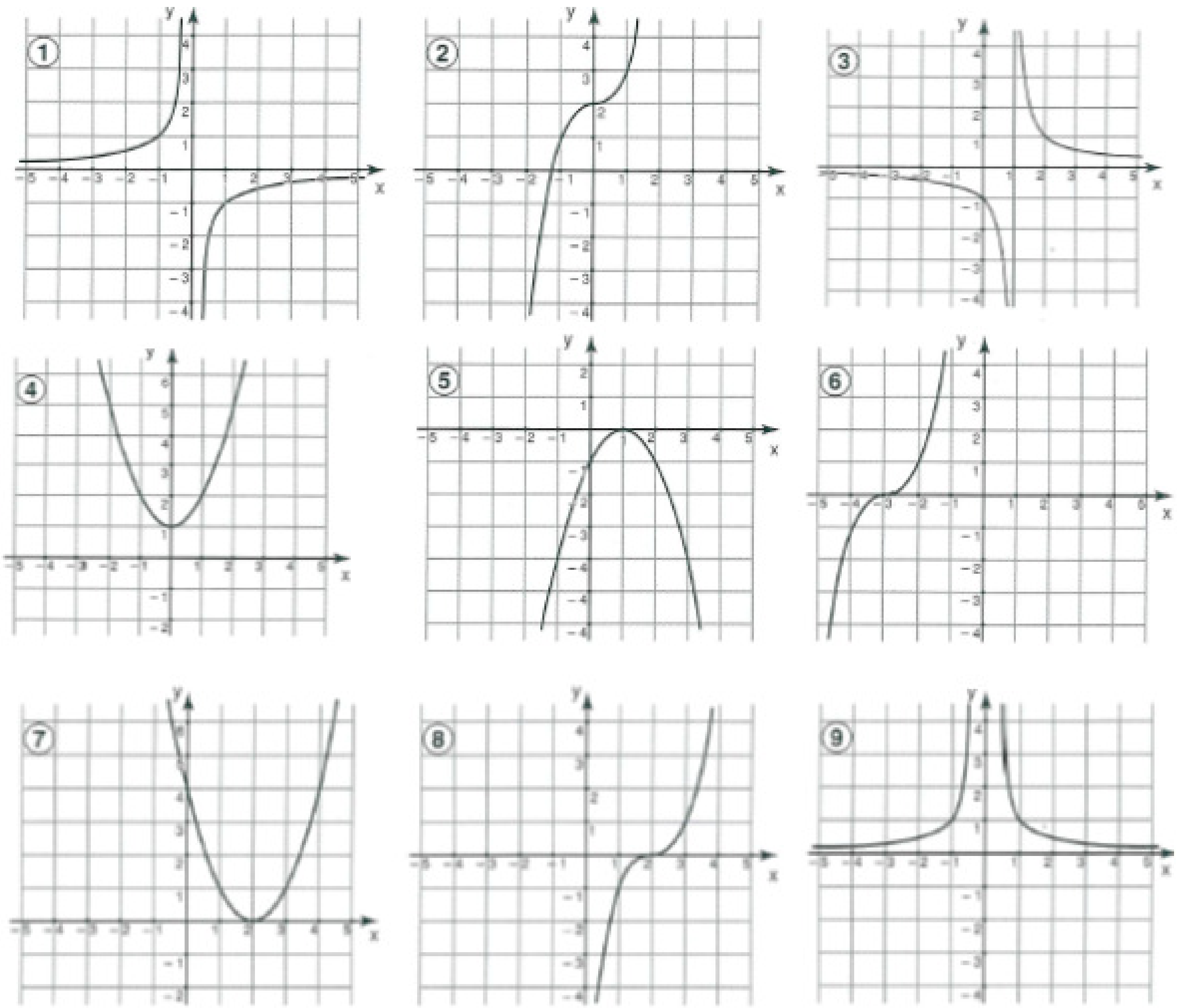
Dom f

Im f

Exercice 1

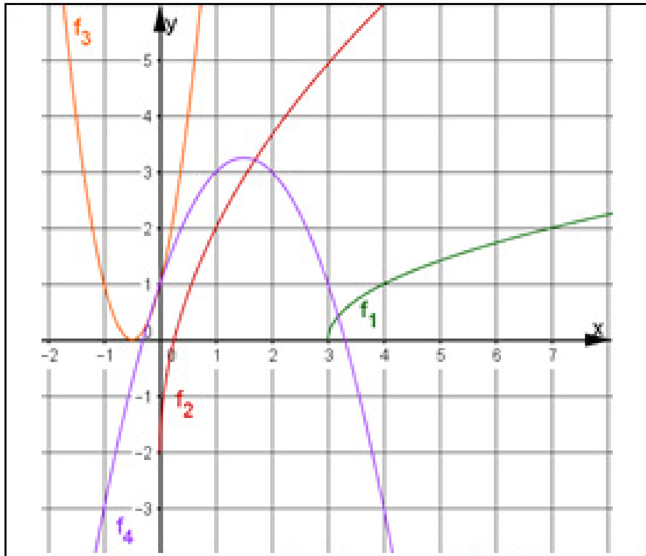
Associe les équations aux graphiques en t'aidant des fonctions de référence et des caractéristiques des fonctions que tu sais déterminer (racine et ordonnée à l'origine).

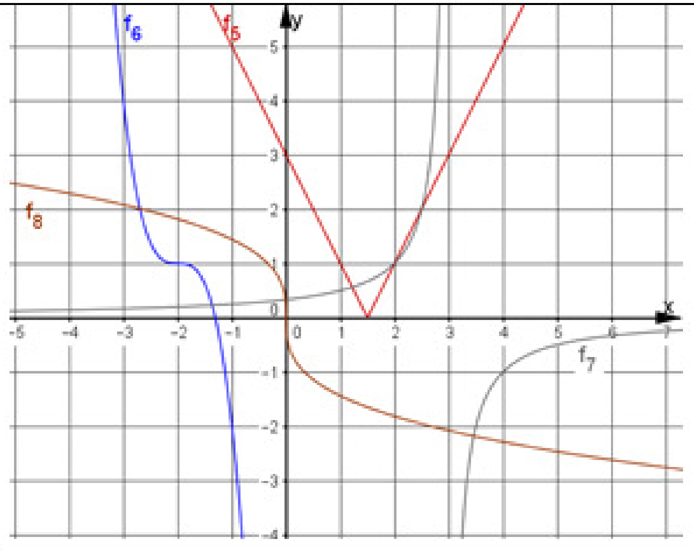
$f(x) = x^3 + 2$	$p(x) = (x+3)^3$	$t(x) = x^3 - 6x^2 + 12x - 8$
$g(x) = \frac{1}{x^2}$	$r(x) = \frac{1}{x-1}$	$u(x) = -\frac{1}{x}$
$h(x) = x^2 + 1$	$s(x) = (x-2)^2$	$v(x) = -x^2 + 2x - 1$



Exercice 2

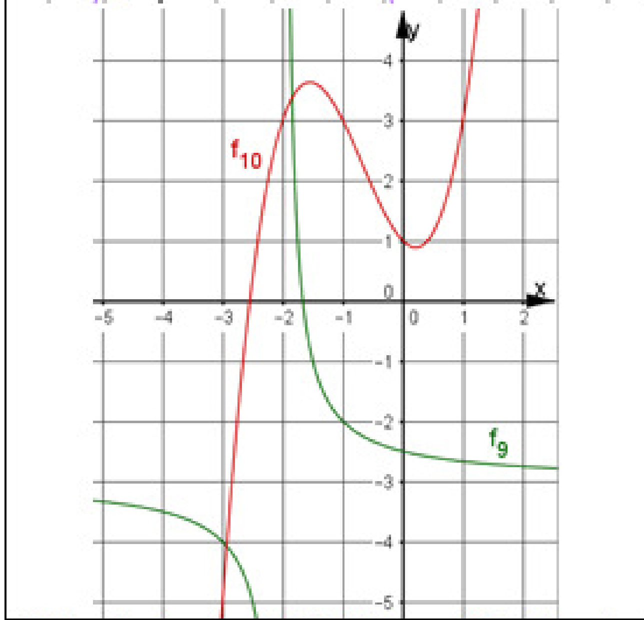
a) Associe la bonne équation au bon graphique. Explique ta démarche et indique tes calculs.





$h(x) = -x^2 + 3x + 1$
$i(x) = \sqrt{x-3}$
$j(x) = \dfrac{1}{3-x}$
$k(x) = x^3 + 2x^2 - x + 1$

$l(x) = (2x+1)^2$
$m(x) = |2x-3|$
$n(x) = 4\sqrt{x} - 2$
$o(x) = -3(x+2)^3 + 1$
$n(x) = \dfrac{1}{x+2} - 3$
$p(x) = \sqrt[3]{-3x}$



b) Pour la fonction f7 et f10 donne l'équation des asymptotes, le domaine et l'ensemble image

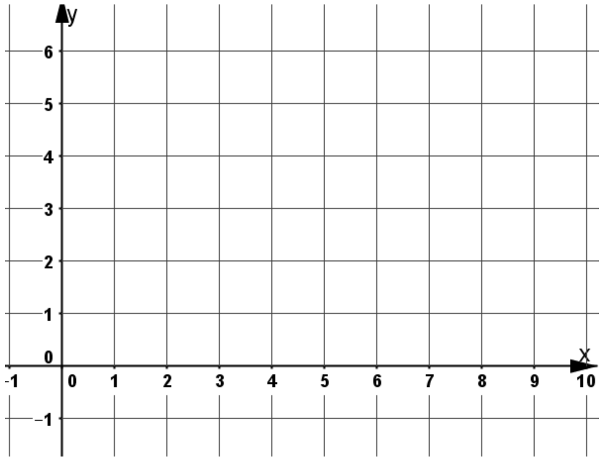
2 Manipulations graphiques

Au départ de fonctions des références, il est possible d'établir le graphique de nombreuses fonctions en utilisant des opérations telles que l'addition, la soustraction et la multiplication par une constante.

2.1 Activité introductive

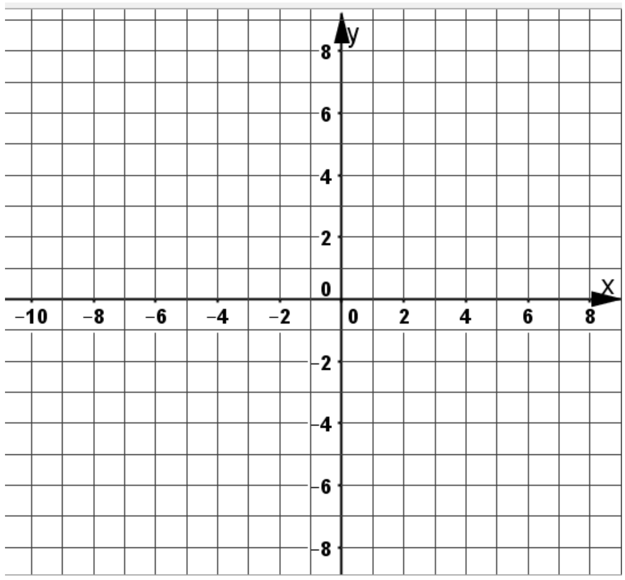
Représente sur un graphique les fonctions suivantes points par points. Et note ensuite les conclusions que tu peux tirer.

Graphique 1 : $f(x) = \sqrt{x}$ $g(x) = \sqrt{x} + 2$ $h(x) = \sqrt{x} - 1$



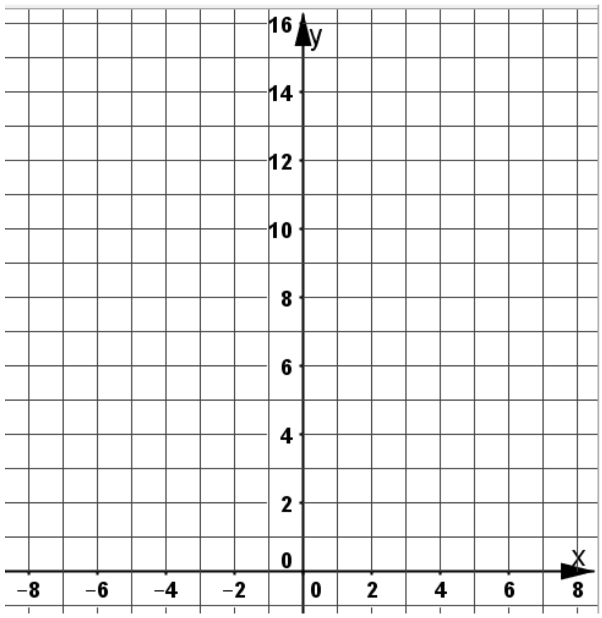
x	f(x)	g(x)	h(x)

Graphique 2 : $f(x) = x^3$ $f(x) = (x+1)^3$ $h(x) = (x-2)^3$



x	f(x)	g(x)	h(x)

Graphique 3 : $f(x) = x^2$ $g(x) = 4x^2$ $h(x) = \frac{1}{2}x^2$



x	f(x)	g(x)	h(x)

Que devient le point (1 ;1) ?

Et le point (2 ;4) ?

2.2 Translations verticales

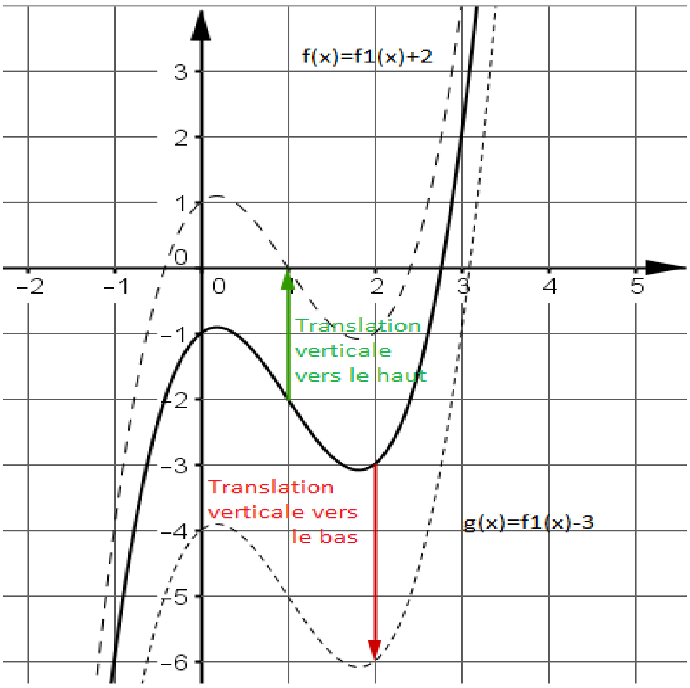
Connaissant le graphique de la fonction $f_1(x)$, nous pouvons aisément déduire le graphique de la fonction $f(x)$ définie par :

$$f(x) = f_1(x) + \boldsymbol{k}$$

Avec k étant un réel non nul.

Cette transformation s'applique sur les ordonnées, il s'agit d'une **translation verticale** de k unités. Un point de coordonnées $(a; b)$ sera transformé en $(a; b + \boldsymbol{k})$.

Si k est négatif, l'ordonnée de la fonction de départ diminue, il s'agit donc d'une translation verticale vers le bas. Et au contraire si k est positif, l'ordonnée de départ augment et il s'agit d'une translation verticale vers le haut..



Translation verticale

$$f(x) = f_1(x) + \boldsymbol{k}$$

Vers **le haut** si k est **positif.** Vers **le bas** si k est **négatif.**

2.3 Translations horizontales

Connaissant le graphique de la fonction $f_1(x)$, nous pouvons déduire le graphique de la fonction $f(x)$ définie par :

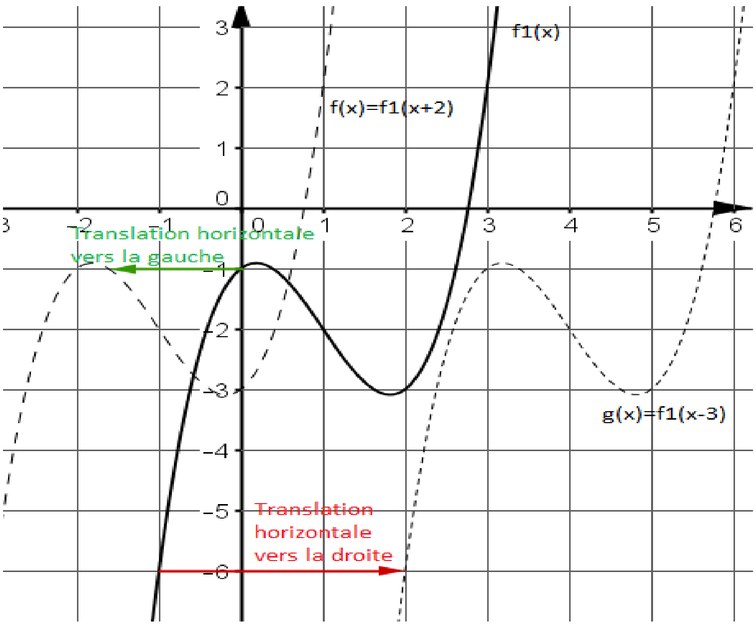
$$f(x) = f_1(x + \boldsymbol{k})$$

Avec k étant un réel non nul.

Cette transformation s'applique sur les abscisses, en effet on remplace x par $x + \boldsymbol{k}$, il s'agit d'une **translation horizontale** de k unités.

Un point de coordonnées $(a; b)$ sera transformé en $(a - \boldsymbol{k}; b)$.

Comme nous l'avons constaté dans l'activité introductive si k est négatif, il s'agit d'une translation horizontale vers la droite. Et au contraire si k est positif, il s'agit d'une translation horizontale vers la gauche.



Translation horizontale

$$f(x) = f_1(x + \boldsymbol{k})$$

Vers **la gauche** si k est **positif.** Vers **la droite** si k est **négatif.**

Exercice 3

Trace le graphique des fonctions suivantes définies par

1. $f(x) = x^2 - 1$
2. $f(x) = (x-2)^3$
3. $f(x) = \frac{1}{x} - 5$
4. $f(x) = 3 + \frac{1}{x+2}$
5. $f(x) = 1 + \sqrt[3]{x+1}$

Entraîne-toi Exercice 4 (supplémentaires)

2.4 Etirement et compression verticale

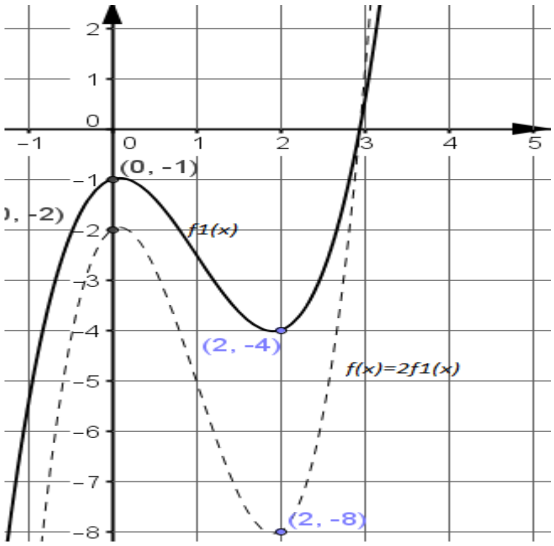
Connaissant le graphique de la fonction $f_1(x)$, nous pouvons déduire le graphique de la fonction $f(x)$ définie par :

$$f(x) = \boldsymbol{k} f_1(x)$$

Avec k étant un réel non nul et différent de 1.

Cette transformation s'applique sur les ordonnées, celles-ci sont multipliées par k.

- Si k est plus grand que 1, l'ordonnée de la fonction de départ augmente, il s'agit d'un étirement vertical de k. Un point de coordonnées $(a; b)$ sera transformé en $(a; \boldsymbol{k}b)$.
  Exemple $k = 3$ alors le point $(-2; 1)$ devient $(-2; 3)$.



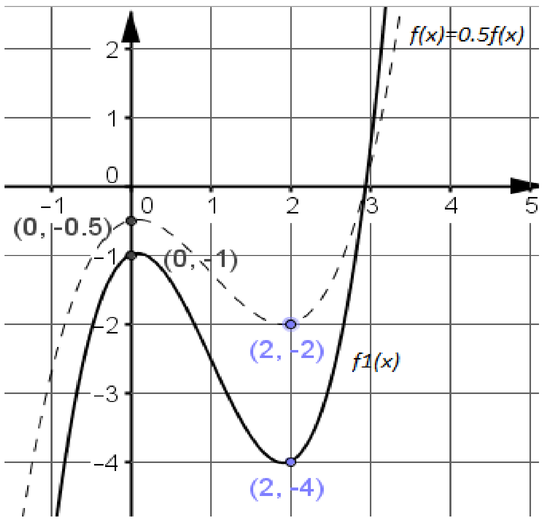
Etirement vertical

$f(x) = \boldsymbol{k} f_1(x)$ avec **k>1**

- Si k est compris entre 0 et 1, l'ordonnée de départ diminue et il s'agit d'une compression verticale de k**.** Un point de coordonnées $(a; b)$ sera transformé en $(a; \boldsymbol{k}b)$
  Exemple $k = 0{,}5 = \frac{1}{2}$ alors le point $(-2; 1)$ devient $\left(-2; \frac{1}{2}\right)$.

Compression verticale

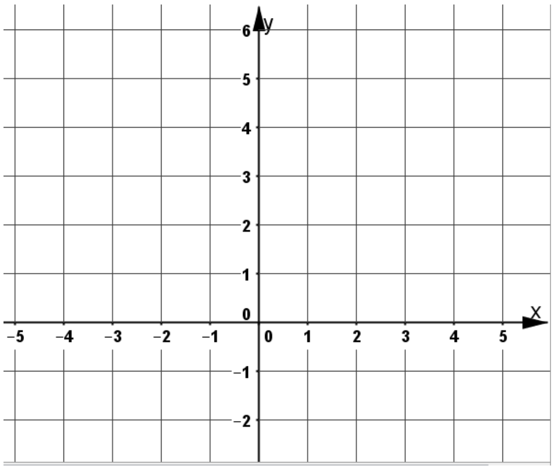
$f(x) = \boldsymbol{k} f_1(x)$ avec **0<k<1**



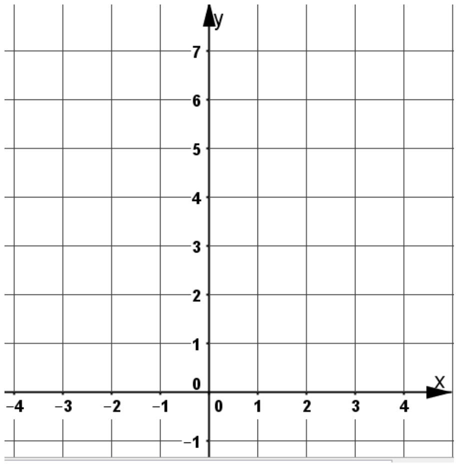
- Si k est négatif, il s'agit d'une symétrie d'axe x, voir point suivant.

Exemple :

$f(x) = 3|x|$



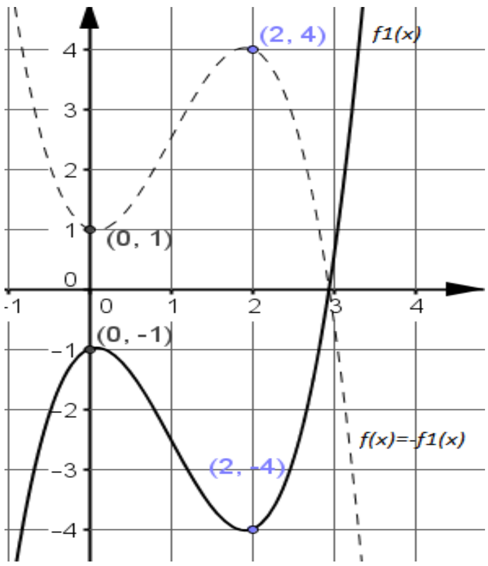
$g(x) = \frac{1}{2}x^2$



2.5 Symétrie orthogonale

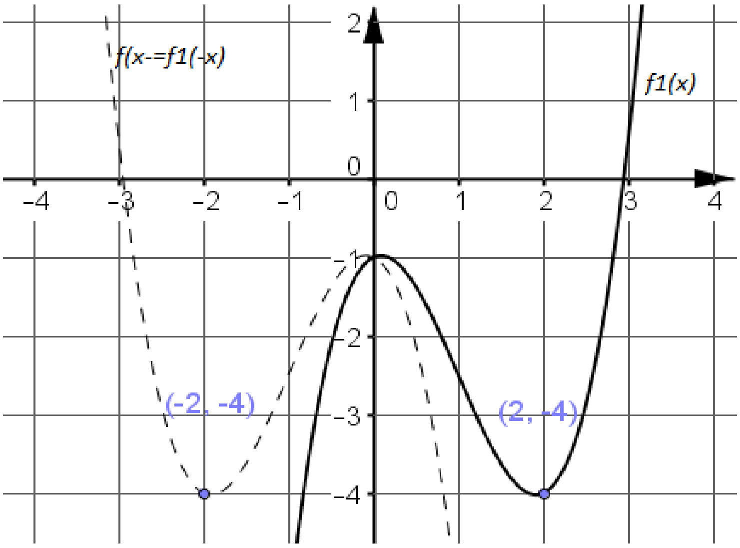
Il existe deux types de manipulations graphiques concernant les symétries orthogonales :

- La symétrie orthogonale d'axe x
  Il s'agit d'une transformation sur les ordonnées : un point $(a; b)$ sera transformé en $(a; -b)$



Symétrie orthogonale d'axe x
$f(x) = -f_1(x)$

- La symétrie orthogonale d’axe y
  Il s’agit d’une transformation sur les abscisses : un point $(a; b)$ sera transformé en $(-a; b)$



Symétrie orthogonale d’axe y
$f(x) = f_1(-x)$

2.6 Etirement et compression horizontal

Il existe aussi des compression et étirement horizontaux $f(x) = f_1(\boldsymbol{k}x)$ mais nous ne l’aborderons pas dans le cadre de ce cours.

2.7 Ordre de priorité des transformations

Comme les opérations arithmétiques sont soumises à des règles PEMDAS, les combinaisons de transformations le sont aussi. **Les transformations s’effectuent donc dans l’ordre suivant : symétrie orthogonale d’axe y, TH, compression ou étirement vertical, symétrie orthogonale d’axe x et pour terminer TV.**

Exemple :

$$g(x) = 1 - \sqrt[3]{x-2}$$

$$\sqrt[3]{x} \xrightarrow[\text{2 vers la droite}]{\text{translation horizontale de}} \sqrt[3]{x-2} \xrightarrow{\text{symétrie orthogonale d'axe } Ox} -\sqrt[3]{x-2} \xrightarrow[\text{verticale de 1 vers le haut}]{\text{translation}} -\sqrt[3]{x-2}+1$$

2.8 Tableau récapitulatif

	$f_r(x) = x$	$f_r(x) = x^2$	$f_r(x) = x^3$	$f_r(x) = \|x\|$	$f_r(x) = \sqrt{x}$	$f_r(x) = \sqrt[3]{x}$	$f_r(x) = \frac{1}{x}$
Translation verticale $f(x) = f_u(x) + \boldsymbol{k}$ k>0 vers le haut k<0 vers le bas							
Etirement vertical $f(x) = \boldsymbol{k} f_u(x)$ **k>1** Les ordonnées sont multipliées par k							
Compression verticale $f(x) = \boldsymbol{k} f_u(x)$ **0<k<1** Les ordonnées sont multipliées par k							
Translation horizontale $f(x) = f_u(x + \boldsymbol{k})$ k>0 vers la gauche k<0 vers la droite							
Symétrie orthogonale d'**axe x** $f(x) = -f_u(x)$ Les ordonnées deviennent opposées							
Symétrie orthogonale d'**axe y** $f(x) = f_u(-x)$ Les abscisses deviennent opposées							

Exercice 5

A partir du graphique de la fonction f représentée ci-dessous, trace les fonctions suivantes en indiquant les transformations associées :

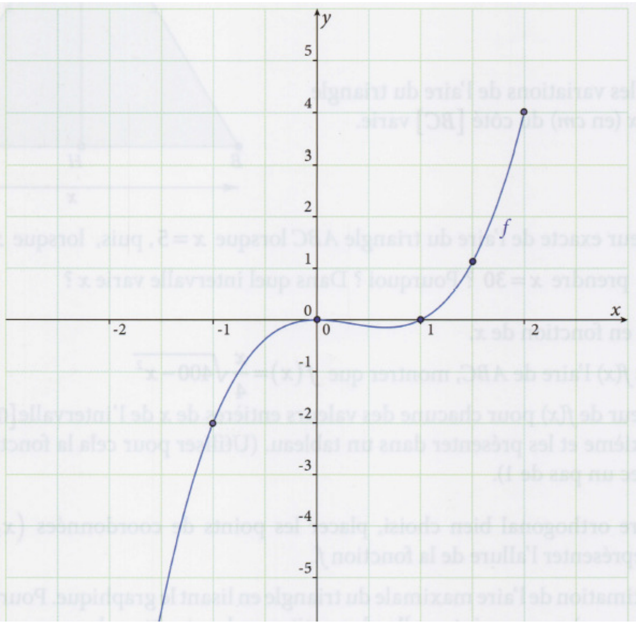
1) $g(x) = f(x) + 2$

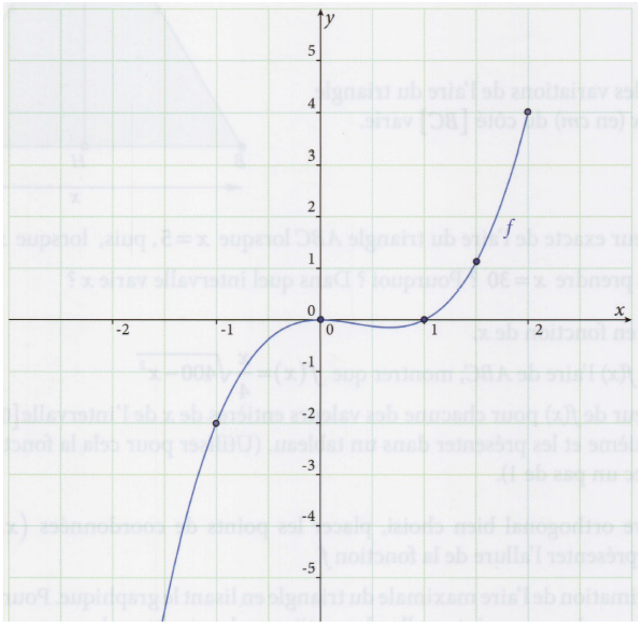
4) $j(x) = f(-x)$

2) $h(x) = f(x + 2)$

5) $k(x) = 2f(x)$

3) $i(x) = -f(x)$





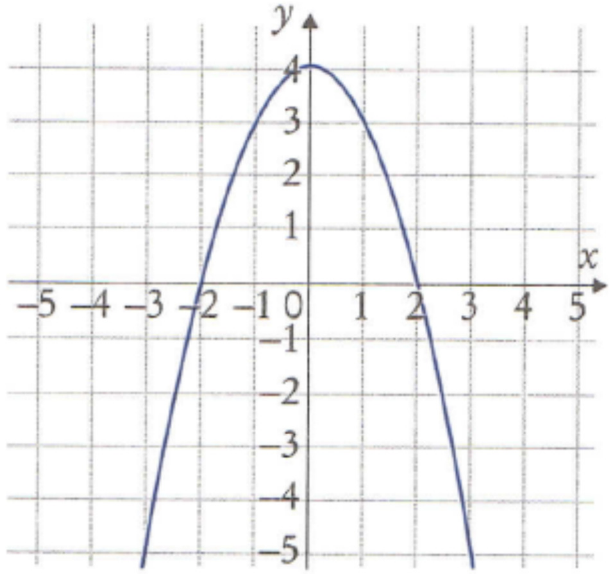
En observant les graphiques trouvés, détermine le domaine, l'ensemble-image et les racines de chaque fonction.

Quelles sont les transformations qui ont une influence sur le domaine, l'ensemble-image et les racines ?

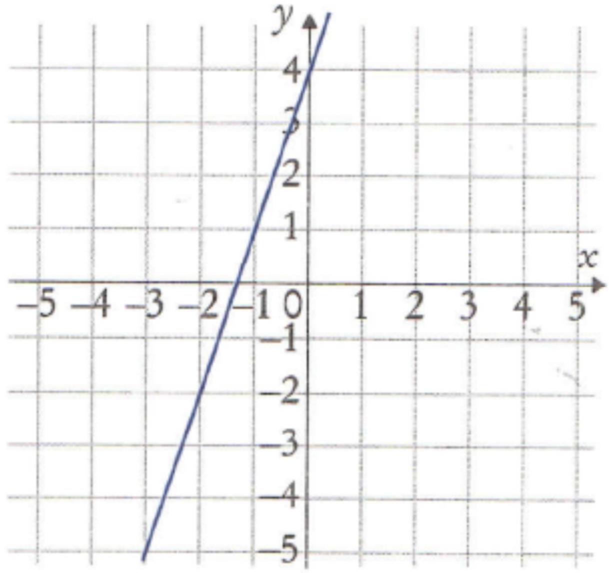
Exercice 6

A partir des fonctions dessinées ci-dessous, trace la manipulation demandée.

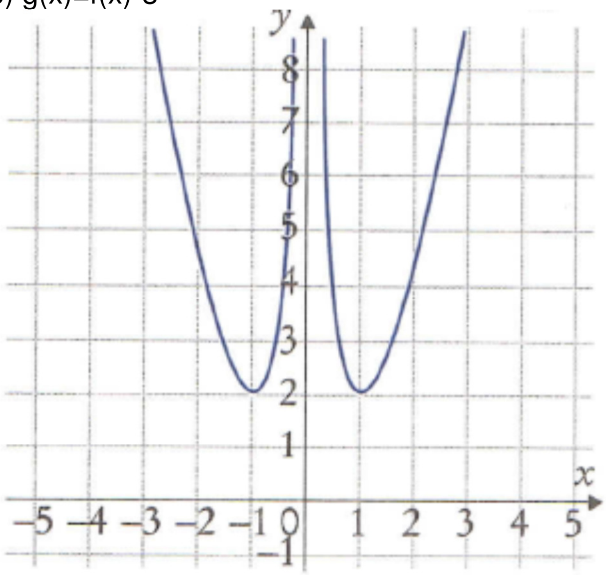
1) g(x)=f(x-2)



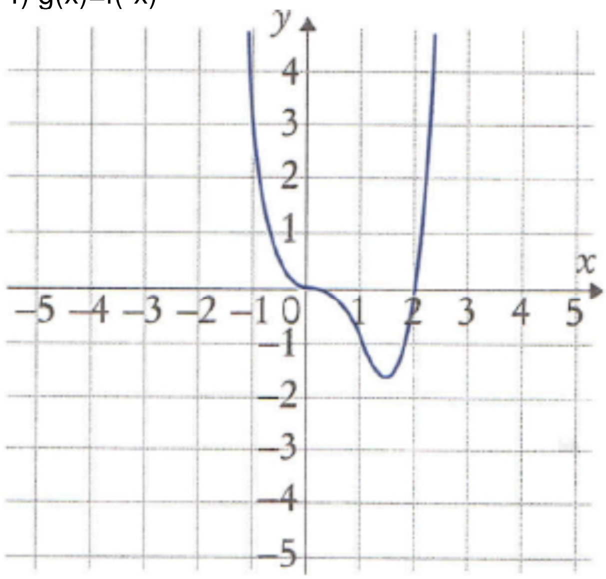
2) g(x)=2f(x)



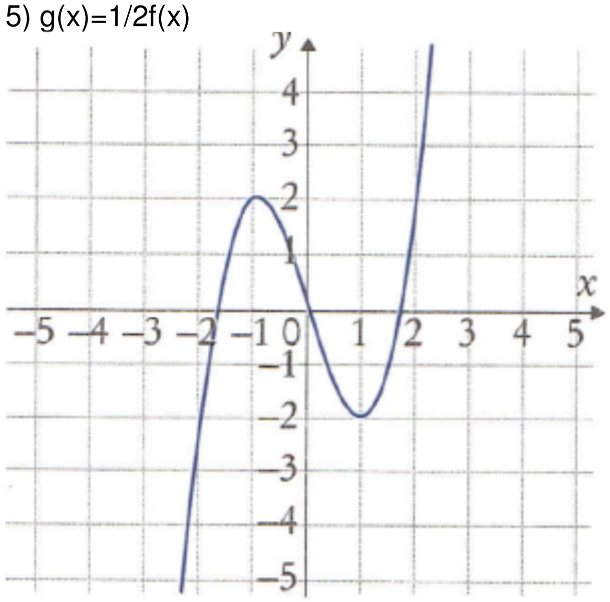
3) g(x)=f(x)-3



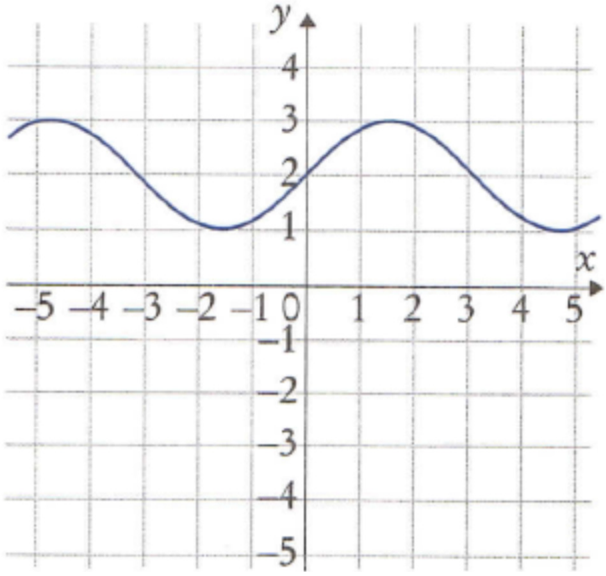
4) g(x)=f(-x)



5) g(x)=1/2f(x)



6) g(x)=-f(x)



Entraîne-toi

Exercice 7 (supplémentaires)

Exercice 8 (supplémentaires)

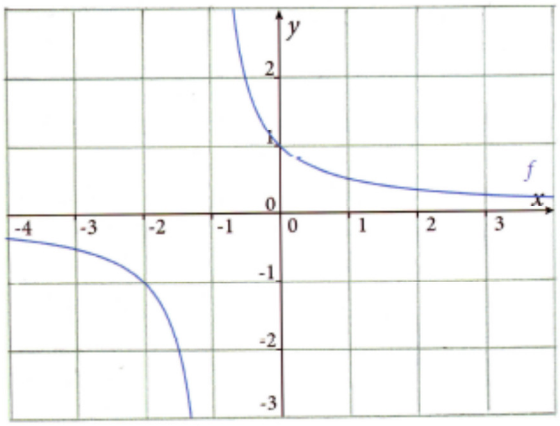
Exercice 9

Associer chaque graphique à la fonction qu'il représente.

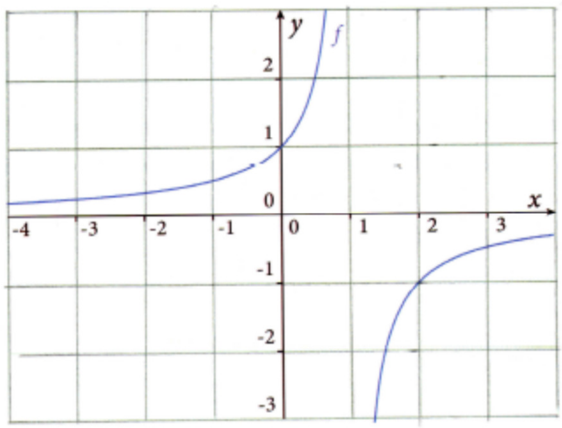
(A) $f(x)=\frac{1}{x}-1$ (B) $f(x)=\frac{1}{x-1}$ (C) $f(x)=\frac{1}{x+1}$ (D) $f(x)=\frac{1}{x-1}-1$

(E) $f(x)=\frac{-1}{x}-1$ (F) $f(x)=\frac{-1}{x-1}$ (G) $f(x)=\frac{-1}{x+1}$ (H) $f(x)=\frac{-1}{x-1}-1$

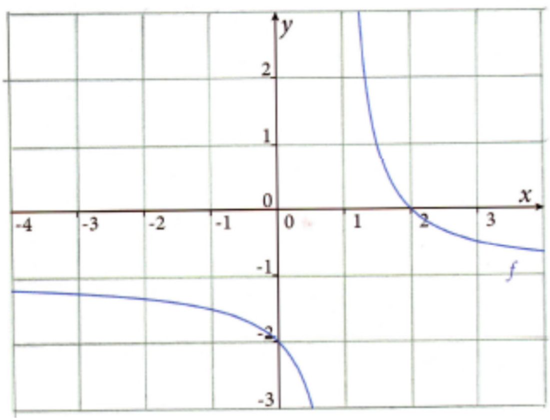
1.



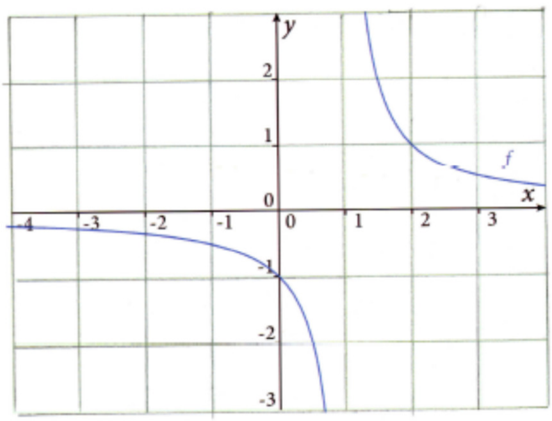
2.



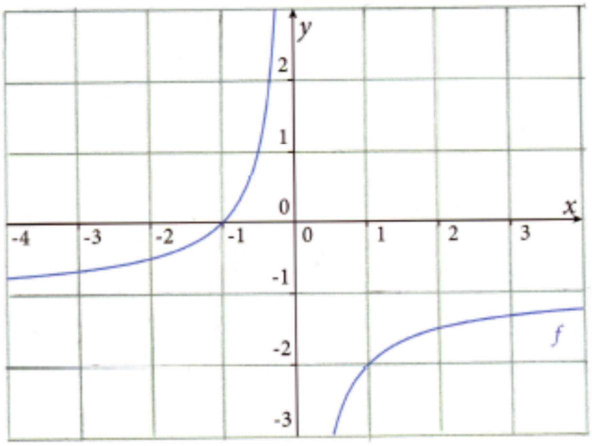
3.



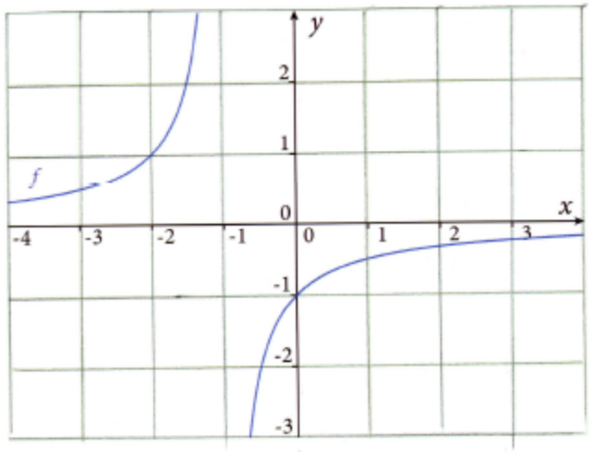
4.



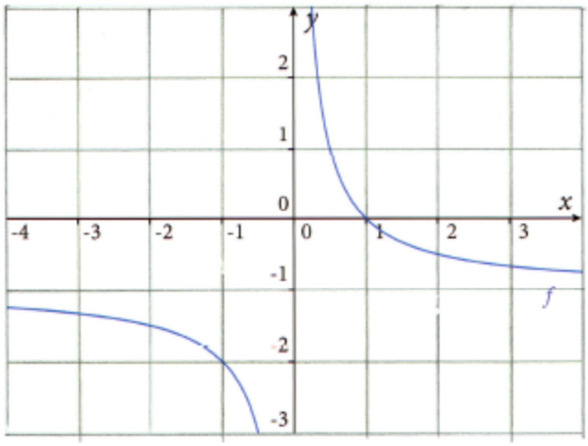
5.



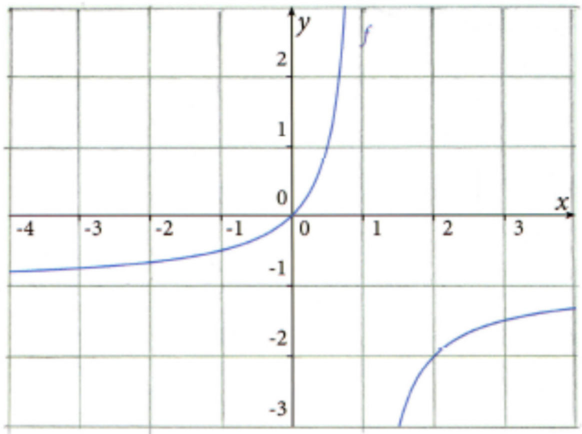
6.



7.



8.

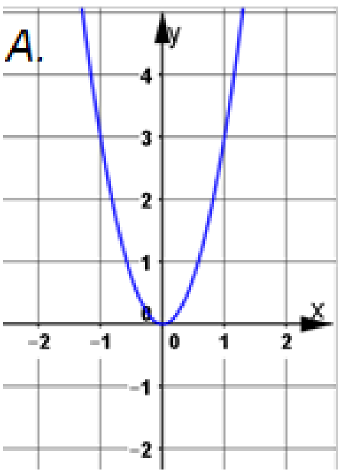


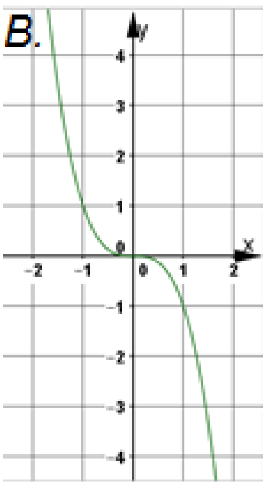
Exercice 10

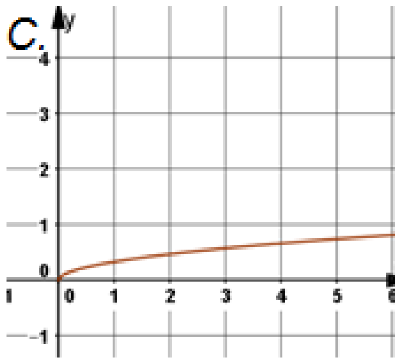
Associe le graphique à son équation et donne la fonction usuelle de référence et explique la manipulation graphique effectuée.

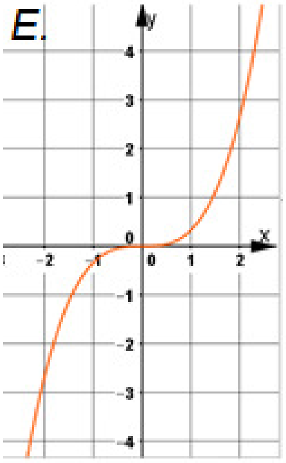
$f_1(x) = \frac{3}{x}$ $\quad$ $f_3(x) = -x^3$ $\quad$ $f_5(x) = 3x^2$ $\quad$ $f_7(x) = \sqrt{x+3}$

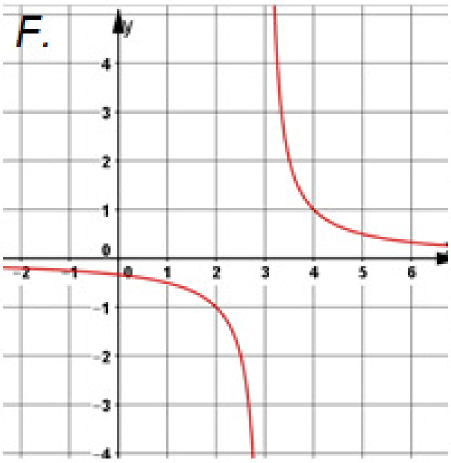
$f_2(x) = \frac{\sqrt{x}}{3}$ $\quad$ $f_4(x) = \frac{1}{x-3}$ $\quad$ $f_6(x) = \frac{x^3}{3}$ $\quad$ $f_8(x) = x^2 - 3$

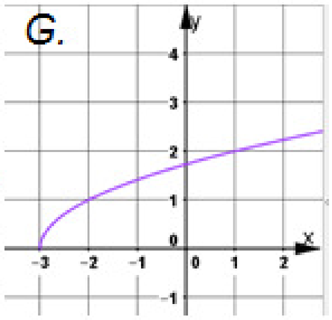


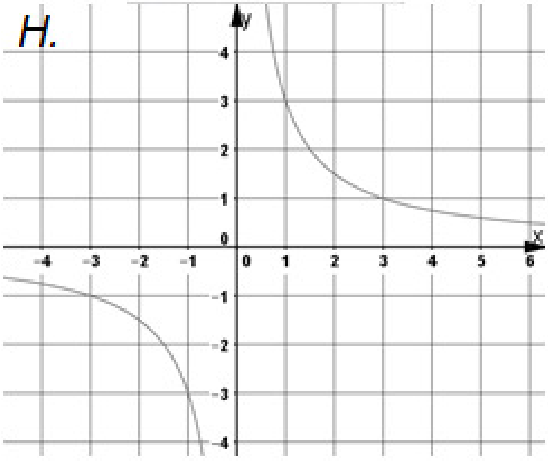


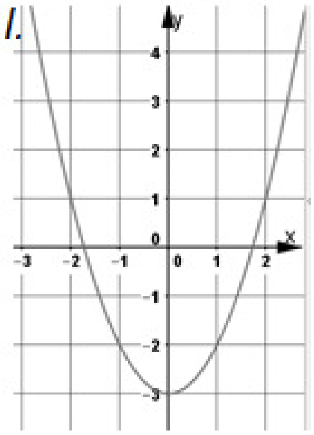




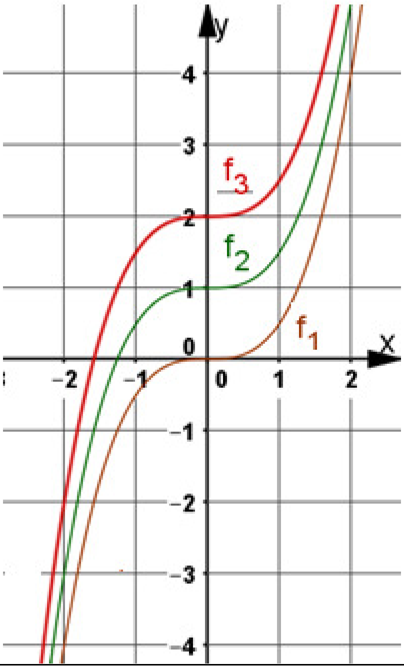
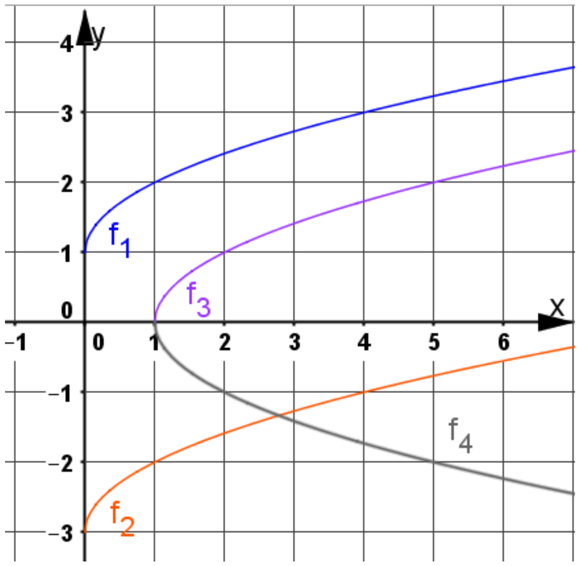


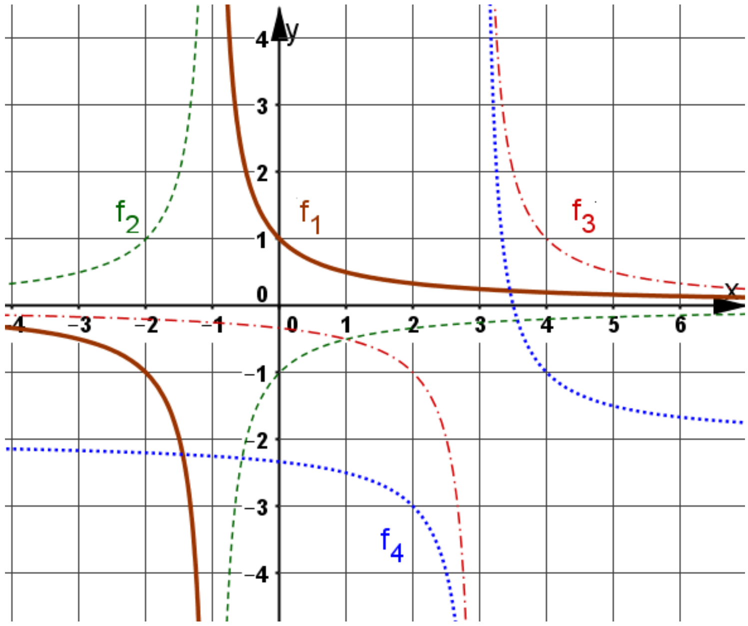






Exercice 11

En sachant que $f_1(x) = 0.5x^3$, écrire les équations des deux autres fonctions et indiquer les transformations effectuées. 	En sachant que $f_1(x) = \sqrt{x+1}$ écrire les équations des quatre autres fonctions et indiquer les transformations effecutées. 



En sachant que $f_1(x) = \frac{1}{x+1}$ écrire les équations des trois autres fonctions et indiquer les transformations effectuées.

Donne aussi les équations des asymptotes.

Exercice 12

Trace le graphique des fonctions suivantes définies par :

1. $f(x) = -2x + 3$
2. $f(x) = x^3 - 3$
3. $f(x) = \dfrac{1}{x+1}$
4. $f(x) = 2\sqrt[3]{x}$
5. $f(x) = -2 + \sqrt{-x}$
6. $f(x) = \dfrac{(x+1)^3}{2}$
7. $f(x) = 3\sqrt{x+2} - 4$
8. $f(x) = \dfrac{1}{2x} - 1$
9. $f(x) = -2|x-3|$

Exercice 13

Construis les fonctions suivantes par manipulations graphiques et décris les transformations géométriques utilisées.

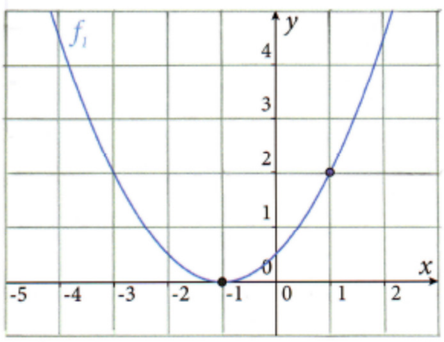
1. $f(x) = \sqrt[3]{x-3}$
2. $f(x) = \dfrac{-2}{x}$
3. $f(x) = -\dfrac{1}{2}(x-1)^2 + 2$

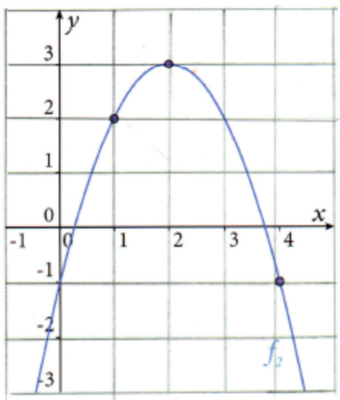
Entraîne-toi

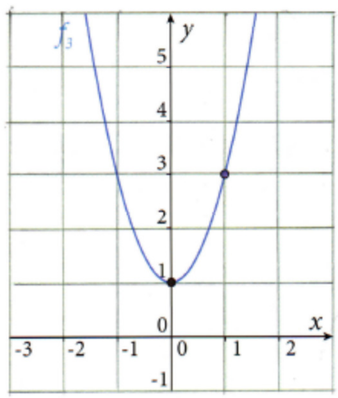
Exercice 14 (supplémentaire)

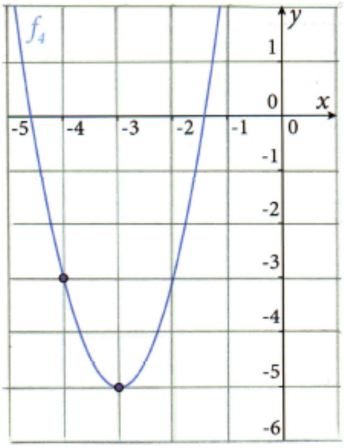
Exercice 15

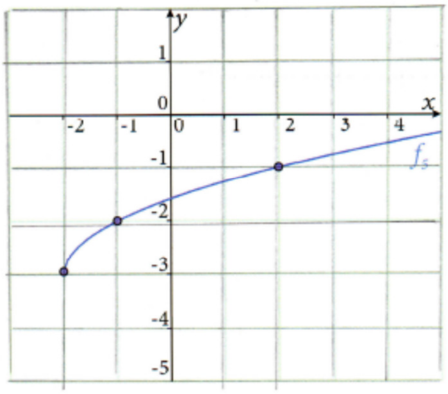
Déterminer l'expression analytique de chacune des fonctions correspondant aux graphiques ci-dessous en utilisant les points marqués. Préciser les étapes permettant leur construction à partir d'une fonction de référence.

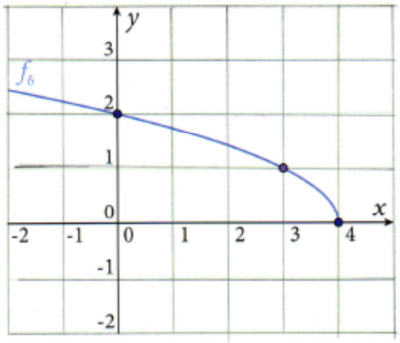


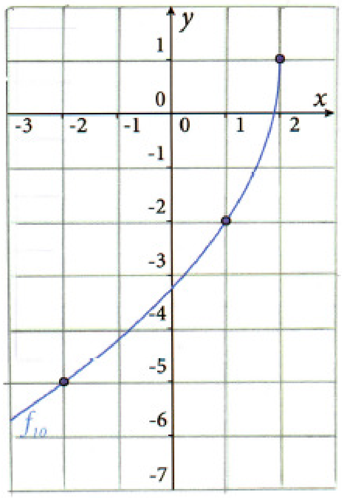


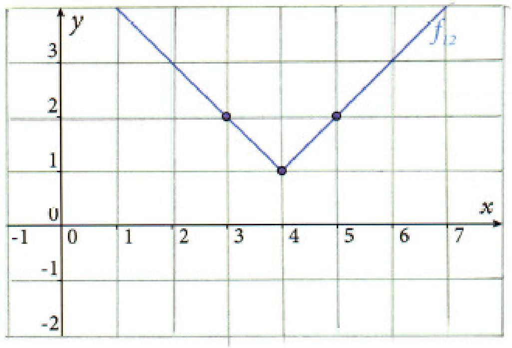


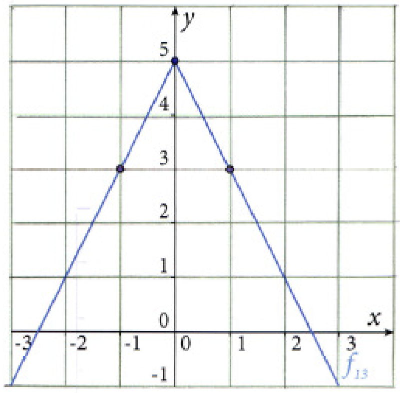

f_4
x
y

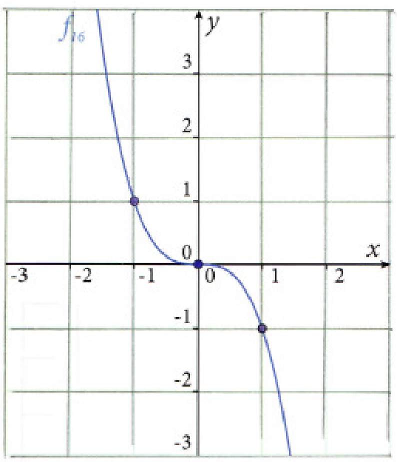

f_5
x
y

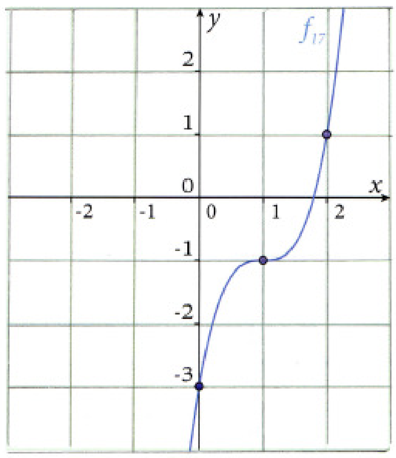

f_6
x
y

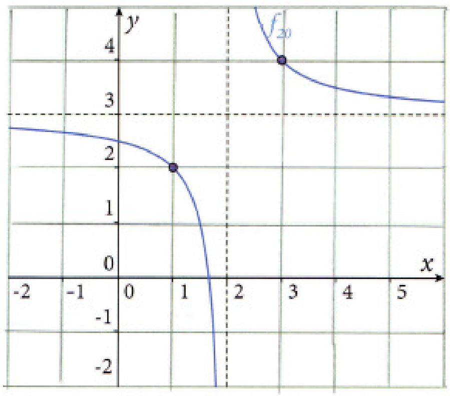

f_{10}
x
y


f_{12}
x
y


f_{13}
x
y

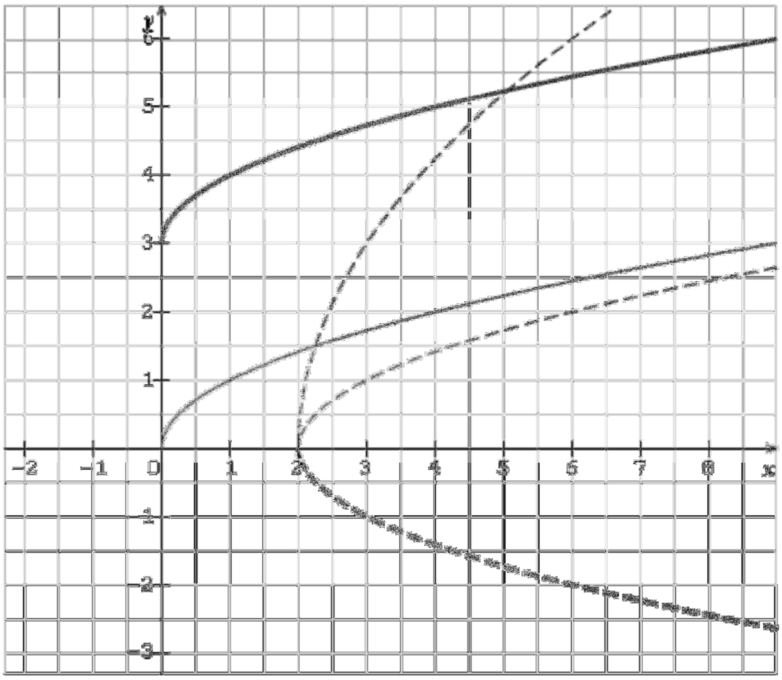

f_{16}
x
y

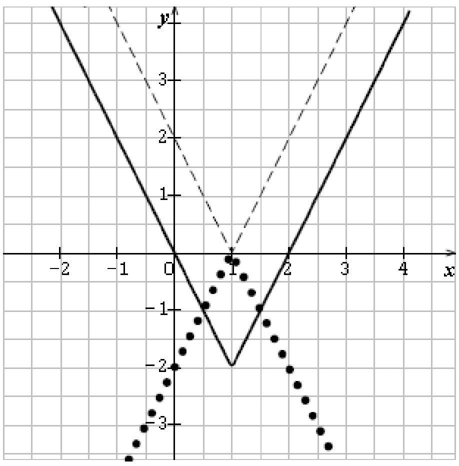

f_{17}
x
y

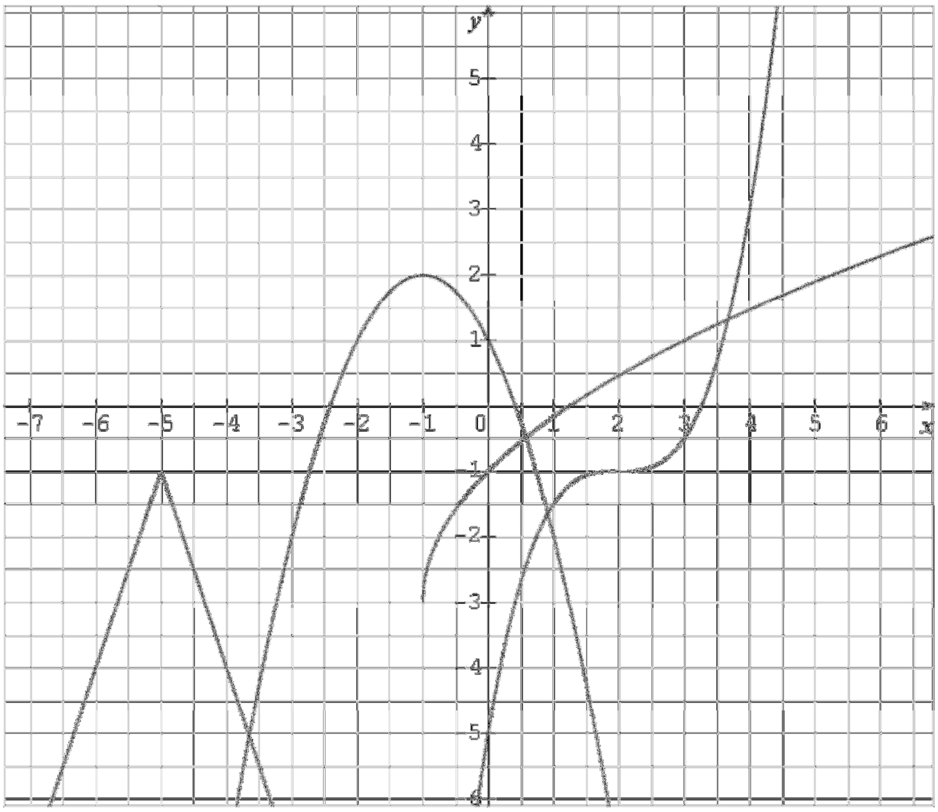

f_{20}
x
y

Exercice 16

Donne les équations des fonctions suivantes







Entraîne-toi

[Exercice 17 (supplémentaire)](#)
[Exercice 18 (supplémentaire)](#)