

Primitives – Un peu de tout

1. $P = \int \frac{1+x+x^2}{x(1+x^2)} dx$

2. $P = \int 3 \cdot \cos^2 \frac{x}{2} dx$

3. $\int \frac{2x+1}{(x-2)^2} dx$

4. $\int \sin^2 5x dx$

5. $\int \cos^2 \left(\frac{x}{3} \right) dx$

Primitives – Un peu de tout

$$1. P = \int \frac{1+x+x^2}{x(1+x^2)} dx$$

Méthode : décomposition en fractions rationnelles

$$\int \frac{k(x)}{\underbrace{(ax^2+bx+c)(dx+e)}_{\Delta < 0}} dx : \frac{k(x)}{\underbrace{(ax^2+bx+c)(dx+e)}_{\Delta < 0}} = \frac{mx+n}{ax^2+bx+c} + \frac{p}{cx+d}$$

➤ Décomposer la fraction de départ en une somme de fractions rationnelles :

$$\frac{x^2+x+1}{x(x^2+1)} = \frac{p}{x} + \frac{m.x+n}{x^2+1} \Leftrightarrow \frac{x^2+x+1}{x(x^2+1)} = \frac{p.x^2+p+m.x^2+n.x}{x(x^2+1)}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} p+m=1 \\ n=1 \\ p=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p=1 \\ m=0 \\ n=1 \end{cases} \quad \text{donc} \quad \frac{x^2+x+1}{x(x^2+1)} = \frac{1}{x} + \frac{0.x+1}{x^2+1}$$

➤ Calculer la primitive à partir de cette décomposition :

$$P = \int \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2+1} \right) dx = \ln|x| + \arctg x + C$$

$$2. P = \int 3 \cdot \cos^2 \frac{x}{2} dx$$

Formule :

$$1 + \cos x = 2 \cos^2 \frac{x}{2} \Leftrightarrow \cos^2 \frac{x}{2} = \frac{1}{2} + \frac{\cos x}{2}$$

$$P = 3 \int \left(\frac{1}{2} + \frac{\cos x}{2} \right) dx$$

$$= 3 \left(\frac{x}{2} + \frac{\sin x}{2} \right) + C$$

$$3. P = \int \frac{2x+1}{(x-2)^2} dx$$

Méthode : décomposition en fractions rationnelles

$$\int \frac{k(x)}{(mx+p)(mx+p)^2} dx : \frac{k(x)}{(mx+p)(mx+p)^2} = \frac{a}{mx+p} + \frac{b}{(mx+p)^2}$$

➤ Décomposer la fraction de départ en une somme de fractions rationnelles :

$$\frac{2x+1}{(x-2)^2} = \frac{a}{x-2} + \frac{b}{(x-2)^2} \Leftrightarrow \frac{2x+1}{(x-2)^2} = \frac{a(x-2)+b}{(x-2)^2}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ -2a + b = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 5 \end{cases} \quad \text{donc} \quad \frac{2x+1}{(x-2)^2} = \frac{2}{x-2} + \frac{5}{(x-2)^2}$$

➤ Calculer la primitive à partir de cette décomposition :

$$P = \int \left(\frac{2}{x-2} + \frac{5}{(x-2)^2} \right) dx = 2 \ln|x-2| + 5 \frac{(x-2)^{-1}}{-1} + C$$

$$P = 2 \ln|x-2| - \frac{5}{x-2} + C$$

$$4. P = \int \sin^2 5x dx$$

Formule :

$$1 - \cos x = 2 \sin^2 \frac{x}{2} \Leftrightarrow \sin^2 \frac{x}{2} = \frac{1 - \cos x}{2}$$

$$P = \int \left(\frac{1 - \cos 10x}{2} \right) dx$$

$$P = \frac{x}{2} - \frac{\sin 10x}{20} + C$$

$$5. P = \int \cos^2\left(\frac{x}{3}\right) dx$$

Formule

$$1 + \cos x = 2 \cos^2 \frac{x}{2} \Leftrightarrow \cos^2 \frac{x}{2} = \frac{1}{2} + \frac{\cos x}{2}$$

$$P = \frac{1}{2} \int \left(1 + \cos \frac{2x}{3}\right) dx = \frac{1}{2} \left(x + \frac{\sin \frac{2x}{3}}{\frac{2}{3}} \right) + C$$

$$P = \frac{1}{2} x + \frac{3}{4} \sin \frac{2x}{3} + C$$