Combinaisons

Enoncés

1. Parmi 20 professeurs et 300 élèves, on doit choisir des délégués pour former une commission mixte comprenant 4 professeurs et 10 élèves :

a) de combien de façons peut-on procéder ?

b) de combien de façons peut-on procéder, si un professeur est désigné d'office et onze élèves sont exclus dès le départ?

2. Calculer n sachant que $C_n^1 + 2.C_n^2 - 9 = 0$.

3. Lors d'un examen de Français, un étudiant doit présenter 6 livres , à savoir 2 romans sur un total de 10 romans et 4 essais sur un total de 12 essais :

a) combien de possibilités a-t-il ?

b) combien de possibilités a-t-il si un roman et un essai, parmi les proposés, sont imposés ?

4. Dans le porte-monnaie d'Emilien, il y a 5 pièces de 50 cents, 3 pièces de 10 cents et 4 pièces de 20 cents. Emilien prend trois pièces au hasard :

a) combien d'assortiments de pièces peut-il avoir ?

b) parmi ces assortiments, combien y en a-t-il avec exactement une pièce de 20 cents ?

5. Parmi 25 professeurs et 200 élèves, on doit choisir des délégués pour former une commission mixte comprenant 5 professeurs et 10 élèves :

a) de combien de façons peut-on procéder ?

b) de combien de façons peut-on procéder, si deux professeurs sont désignés d'office et neuf élèves sont exclus dès le départ?

6. Calculer n sachant que $C_n^1 + 3.C_n^2 - 12 = 0$.

7. Résoudre : $C_{n-1}^{n-5} = 3.C_{n-3}^{n-7}$.

8. Calculer n sachant que $C_{2n}^{1} + C_{2n}^{2} + C_{2n}^{3} - 387n = 0$.

9. Une personne achète trois billets d'une tombola comprenant 20 billets et 5 lots :

1) combien y a-t-il de possibilités qu'il y ait exactement un lot parmi les 3 billets choisis ?
2) combien y a-t-il de possibilités qu'il y ait exactement deux lots parmi les 3 billets choisis ?
3) combien y a-t-il de possibilités qu'il y ait exactement trois lots parmi les 3 billets choisis ?
4) combien y a-t-il de possibilités qu'il y ait au moins deux lots parmi les 3 billets choisis ?

10. Déterminer n lorsque : $C_{n}^{3} = 4.C_{n-2}^{2}$.

11. A partir d'un jeu ordinaire de 52 cartes, combien existe-t-il de mains différentes de 4 cartes contenant :

a) 4 cœurs ?
b) aucun pique ?
c) un as et un triple (non formé d'as) ?

☺ : un triple = 3 cartes de même valeur, par exemple 3 rois.

d) des valeurs différentes ?

☺ : valeurs = as, roi, …

e) des couleurs différentes ?

☺ : couleurs= cœur, carreau, trèfle, pique

12. A sa mort, un vieux rentier a légué 9 peintures à ses 3 enfants. De combien de façons différentes peut-il répartir les 9 peintures aux 3 enfants si chacun doit recevoir 3 peintures ?

13. A la librairie du coin, on vend 5 titres différents des bandes dessinées suivantes : Astérix, Lucky Luke, Achille Talon et Kid Paddle. Vous désirez acheter 3 albums. De combien de façons différentes pouvez-vous

a) le faire ?
b) le faire si vous achetez 3 albums de la même bande dessinée ?
c) achetez 3 volumes de bandes dessinées différentes ?

Combinaisons

Corrigés

1.Combinaisons avec répétitions

a) Définition :

On appelle **combinaisons avec répétitions** de m lettres prises n à n ($n \leq m$) tous les groupes de n lettres choisies parmi les m lettres données, chaque lettre pouvant figurer plusieurs fois dans un même groupe : γ_m^n = nombre de ces groupes.

b) Formule :

$$\boxed{\gamma_m^n = \frac{(m+n-1)(m+n-2)\ldots m}{n!}}$$

2.Combinaisons sans répétitions

a) Définition :

On appelle **combinaisons sans répétitions** de m lettres distinctes prises n à n ($n \leq m$) tous les groupes de n lettres distinctes choisies parmi les m lettres données : C_m^n = nombre de ces groupes.

c) Formule :

$$\boxed{C_m^n = \frac{m!}{(m-n)!\ n!}}$$

3.Corrigés

1. Parmi 20 professeurs et 300 élèves, on doit choisir des délégués pour former une commission mixte comprenant 4 professeurs et 10 élèves :

Ordre : non répétitions : non

a) de combien de façons peut-on procéder ?

$$C_{20}^{4}.C_{300}^{10} = 4845 \,.\, 1{,}39\ldots 10^{18} = 6{,}77 \,.\, 10^{21}$$

b) de combien de façons peut-on procéder, si un professeur est désigné d'office et onze élèves sont exclus dès le départ?

$$C_{19}^{3}.C_{289}^{10} = 969 \,.\, 9{,}56\ldots 10^{17} = 9{,}27 \,.\, 10^{20}$$

2. Calculer n sachant que $C_n^1 + 2.C_n^2 - 9 = 0$.

$$\Leftrightarrow \frac{n!}{1!(n-1)!} + 2\frac{n!}{2!(n-2)!} - 9 = 0 \Leftrightarrow n + n(n-1) - 9 = 0 \Leftrightarrow n^2 - 9 = 0$$

$\Leftrightarrow n = \pm 3$ et donc $\mathbf{n = 3}$.

3. Lors d'un examen de Français, un étudiant doit présenter 6 livres, à savoir 2 romans sur un total de 10 romans et 4 essais sur un total de 12 essais :

Ordre : non répétitions : non

a) combien de possibilités a-t-il ?

$$\mathbf{C_{10}^{2}.C_{12}^{4} = 45.495 = 22275}$$

b) combien de possibilités a-t-il si un roman et un essai, parmi les proposés, sont imposés ?

$$\mathbf{C_{9}^{1}.C_{11}^{3} = 9.165 = 1485}$$

4. Dans le porte-monnaie d'Emilien, il y a 5 pièces de 50 cents, 3 pièces de 10 cents et 4 pièces de 20 cents. Emilien prend trois pièces au hasard :

a) combien d'assortiments de pièces peut-il avoir ?

Ordre : non répétitions : oui

m=3 (sortes de pièces) n=3 (nombre de pièces prises) ($n \leq m$)

- par formule : $\gamma_3^3 = \dfrac{(3+3-1).(3+3-2).(3+3-3)}{3!} = \dfrac{5.4.3}{6} = 10$;

- par dénombrement :

50	50	50	
50	50	10	
50	50	20	
50	10	10	
50	10	20	
50	20	20	
10	10	10	
10	10	20	
10	20	20	
20	20	20	$\Rightarrow$ 10 possibilités

b) parmi ces assortiments, combien y en a-t-il avec exactement une pièce de 20 cents ?

3 possibilités

5. Parmi 25 professeurs et 200 élèves, on doit choisir des délégués pour former une commission mixte comprenant 5 professeurs et 10 élèves :

Ordre : non répétitions : non

a) de combien de façons peut-on procéder ?

$$\mathbf{C_{25}^{5}.C_{200}^{10} = 53130\ .\ 2{,}24\ldots10^{16} = 1{,}19\ .\ 10^{21}}$$

b) de combien de façons peut-on procéder, si deux professeurs sont désignés d'office et neuf élèves sont exclus dès le départ?

$$\mathbf{C_{23}^{3}.C_{191}^{10} = 1771\ .\ 1{,}40\ldots10^{16} = 2{,}48\ .\ 10^{19}}$$

6. Calculer n sachant que $C_n^1 + 3.C_n^2 - 12 = 0$.

$$\Leftrightarrow \mathbf{\frac{n!}{1!(n-1)!} + 3\frac{n!}{2!(n-2)!} - 12 = 0 \Leftrightarrow n + \frac{3}{2}n(n-1) - 12 = 0}$$

$\Leftrightarrow 2n + 3n^2 - 3n - 24 = 0 \Leftrightarrow 3n^2 - n - 24 = 0 \Leftrightarrow n = -\frac{8}{3}$ ou $n = 3$ et donc **n = 3.**

7. Résoudre : $C_{n-1}^{n-5} = 3.C_{n-3}^{n-7}$.

$$\Leftrightarrow \mathbf{\frac{(n-1)!}{(n-5)!(n-1-n+5)!} = 3\frac{(n-3)!}{(n-7)!(n-3-n+7)!}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{(n-1)!}{(n-5)!4!} = 3\frac{(n-3)!}{(n-7)!4!} \Leftrightarrow \frac{(n-1)(n-2)(n-3)!}{(n-5)(n-6)(n-7)!} = 3\frac{(n-3)!}{(n-7)!}$$

$$\Leftrightarrow \frac{(n-1)(n-2)}{(n-5)(n-6)} = 3 \Rightarrow n^2 - 3n + 2 = 3n^2 - 33n + 90 \Leftrightarrow 2n^2 - 30n + 88 = 0 \Leftrightarrow n^2 - 15n + 44 = 0$$

$\Delta = 49$ $n = 4$ (à rejeter) ou **n =11**

8. Calculer n sachant que $C_{2n}^{1}+C_{2n}^{2}+C_{2n}^{3}-387n=0$.

$$\Leftrightarrow \mathbf{\frac{(2n)!}{1!(2n-1)!}+\frac{(2n)!}{2!(2n-2)!}+\frac{(2n)!}{3!(2n-3)!}-387n=0}$$

$$\Leftrightarrow 2n+\frac{2n(2n-1)}{2}+\frac{2n(2n-1)(2n-2))}{6}-387n=0 \Leftrightarrow 6n+3n(2n-1)+n(2n-1)(2n-2)-1161n=0$$

$\Leftrightarrow n(6+6n-3+4n^2-6n+2-1161)=0 \Leftrightarrow n=0$: à rejeter

$\Leftrightarrow 4n^2-1156=0 \Leftrightarrow n=17$ ou $n=-17$ (à rejeter)

S={17}

9. Une personne achète trois billets d'une tombola comprenant 20 billets et 5 lots :

Ordre : non répétitions : non

1) combien y a-t-il de possibilités qu'il y ait exactement un lot parmi les 3 billets choisis ?

$$\mathbf{C_5^1 . C_{15}^2 = 525}$$

2) combien y a-t-il de possibilités qu'il y ait exactement deux lots parmi les 3 billets choisis ?

$$\mathbf{C_5^2 . C_{15}^1 = 150}$$

3) combien y a-t-il de possibilités qu'il y ait exactement trois lots parmi les 3 billets choisis ?

$$\mathbf{C_5^3 . C_{15}^0 = 10}$$

4) combien y a-t-il de possibilités qu'il y ait au moins deux lots parmi les 3 billets choisis ?

150 + 10 = 160

10. Déterminer n lorsque : $C_n^3=4.C_{n-2}^2$.

<u>CE</u> : $n \geq 3$

$$C_n^3=4.C_{n-2}^2 \Leftrightarrow \frac{n!}{3!(n-3)!}=4\frac{(n-2)!}{2!(n-4)!} \Leftrightarrow \frac{n(n-1)(n-2)!}{3!(n-3)!}=4\frac{3.(n-3)(n-2)!}{3!(n-3)!}$$

$$\Leftrightarrow n(n-1)=12(n-3) \Leftrightarrow n^2-n-12n+36=0 \Leftrightarrow n^2-13n+36=0 \Leftrightarrow n=4 \text{ ou } n=9$$

$$\mathbf{S=\{4,9\}}$$

11. A partir d’un jeu ordinaire de 52 cartes, combien existe-t-il de mains différentes de 4 cartes contenant :

f) 4 cœurs ?

$$\mathbf{C_{13}^{4} = 715}$$

g) aucun pique ?

$$\mathbf{C_{39}^{13} = 82251}$$

h) un as et un triple (non formé d’as) ?

☺ : un triple = 3 cartes de même valeur, par exemple 3 rois.

$$\mathbf{\frac{C_4^1.C_{48}^1.C_3^1.C_2^1}{3.2.1} = 192}$$

i) des valeurs différentes ?

☺ : valeurs = as, roi, …

$$\mathbf{\frac{C_{52}^1.C_{48}^1.C_{44}^1.C_{40}^1}{4.3.2.1} = 183040}$$

j) des couleurs différentes ?

☺ : couleurs= cœur, carreau, trèfle, pique

$$\mathbf{\frac{C_{52}^1.C_{39}^1.C_{26}^1.C_{13}^1}{4.3.2.1} = 28561}$$

12. A sa mort, un vieux rentier a légué 9 peintures à ses 3 enfants. De combien de façons différentes peut-il répartir les 9 peintures aux 3 enfants si chacun doit recevoir 3 peintures ?

$$\mathbf{C_9^3.C_6^3.C_3^3 = 84.20.1 = 1680}$$

13. A la librairie du coin, on vend 5 titres différents des bandes dessinées suivantes : Astérix, Lucky Luke, Achille Talon et Kid Paddle. Vous désirez acheter 3 albums. De combien de façons différentes pouvez-vous

d) le faire ?

$$\mathbf{C_{20}^{3} = 1140}$$

e) le faire si vous achetez 3 albums de la même bande dessinée ?

$$\mathbf{4.C_{5}^{3} = 4.10 = 40}$$

f) achetez 3 volumes de bandes dessinées différentes ?

$$\mathbf{\frac{C_{20}^{1}.C_{15}^{1}.C_{10}^{1}}{3.2.1} = 500}$$