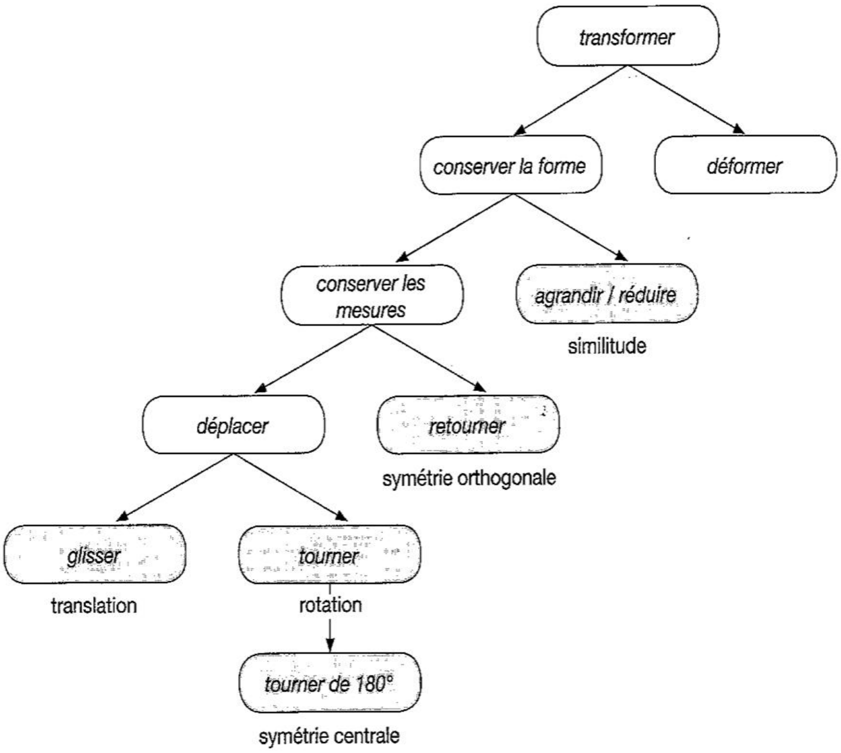
Transformations du plan – Axes de symétries

I. THEORIE – Transformations du plan

1. Schéma de synthèse



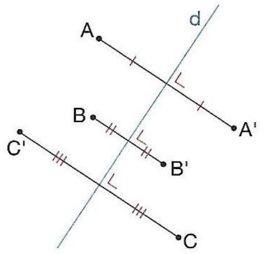
2. Isométrie

Une isométrie est une transformation du plan qui conserve les mesures.

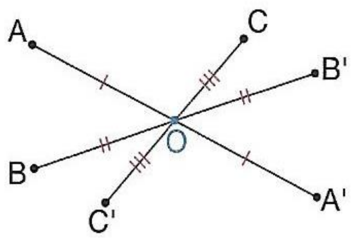
3. Transformations du plan

3.1. Symétrie orthogonale

Définition	*« Le point A' est l'image du point A par la symétrie orthogonale d'axe d » signifie que d est la médiatrice du segment [AA'].*
Ecriture et lecture	**S_d (A) = A'** *Par la symétrie orthogonale d'axe d, l'image du point A est le point A'.*

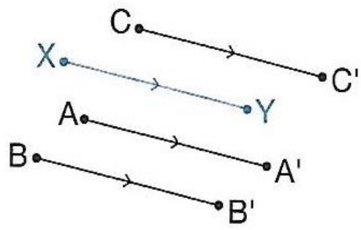
Point fixe	*Tout point de l'axe d'une symétrie orthogonale est sa propre image par cette symétrie.* *Une symétrie orthogonale admet une infinité de points fixes : les points de l'axe.*
Figure	

3.2. Symétrie centrale

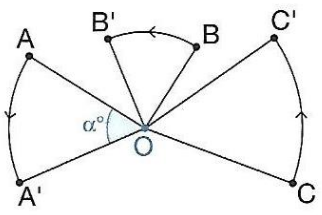
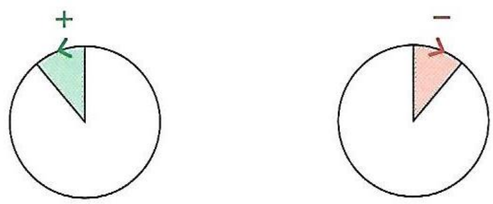
Définition	*« Le point A' est l'image du point A par la symétrie centrale de centre O » signifie que O est le milieu du segment [AA'].*
Ecriture et lecture	S_O **(A) = A'** *Le point A' est l'image du point A par la symétrie centrale de centre O.*
Point fixe	*Seul le centre d'une symétrie centrale est sa propre image par cette symétrie.* *Une symétrie centrale n'admet qu'un seul point fixe : son centre.*
Figure	

3.3. Translation

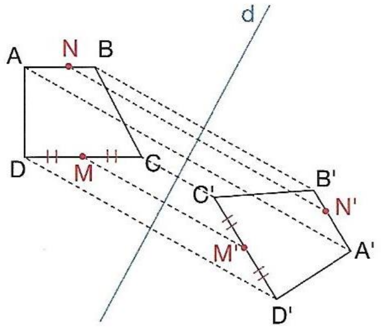
Définition	*« L'image du point A par la translation de vecteur XY » signifie que les demi-droites [XY et [AA' ont la même direction et le même sens et que les segments [XY] et [AA'] ont la même longueur.*
Ecriture et lecture	$t_{\vec{XY}}$ **(A) = A'** *Le point A' est l'image du point A par la translation de vecteur XY.*

Point fixe	*Une translation non-nulle n'admet pas de point fixe.*
Figure	

3.4. <u>Rotation</u>

Caractéristiques	*Une rotation est une transformation du plan qui fait tourner tout point* - *Autour du centre, à une même distance de celui-ci* - *D'une même amplitude* - *De même sens.*
Définition	*« Le point A' est l'image du point A par la rotation de centre O et d'amplitude α » signifie que l'amplitude de l'angle ÂÔÂ' vaut α° et que les segments [OA] et [OA'] ont la même longueur.*
Ecriture et lecture	$\mathbf{r_{0,\alpha}}$ **(A) = A'** *Le point A' est l'image du point A par la rotation de centre O et d'amplitude α.*
Point fixe	*Seul le centre d'une rotation est d'amplitude non-nulle est sa propre image par cette rotation.* *Une rotation d'amplitude non-nulle n'admet donc qu'un seul point fixe : son centre.*
Figure	
Sens de rotation	

3.5. <u>Les invariants</u>

Caractéristiques	*Les isométries conservent :* - *L'alignement des points* - *La longueur des segments* - *Le parallélisme des droites* - *L'amplitude des angles* - *Le périmètre des figures* - *L'aire des figures* - *Le milieu des segments* - *La perpendicularité des droites* *Les isométries conservent donc la forme et la grandeur des figures.*
Figure	

4. **<u>Propriétés des transformations du plan</u>**

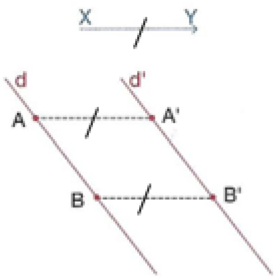
4.1. <u>Translation</u>

4.1.1. Par une translation, l'image d'une droite est une droite qui lui est parallèle.

$$t_{\overrightarrow{XY}}(d) = d' \Rightarrow d \,//\, d'$$

4.1.2. Par une translation, l'image d'une demi-droite est une droite qui lui est parallèle.

$$t_{\overrightarrow{XY}}([AB) = [A'B'$$
$$\Downarrow$$
[AB // [A'B' et
[AB et [A'B' ont le même sens



4.2. <u>Symétrie centrale</u>

4.2.1. Par une symétrie centrale, l'image d'une droite est une droite qui lui est parallèle.

$$\boxed{S_M\,(d) = d' \Rightarrow d \,/\!/\, d'}$$

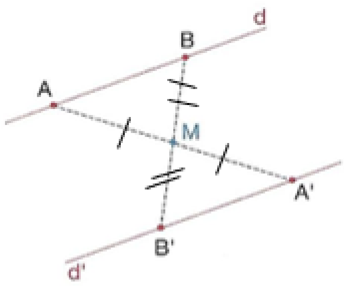
4.2.2. Par la symétrie centrale, l'image d'une demi-droite est une demi-droite qui lui est parallèle et de sens contraire.

S_M ([AB) = [A'B'

$\Downarrow$

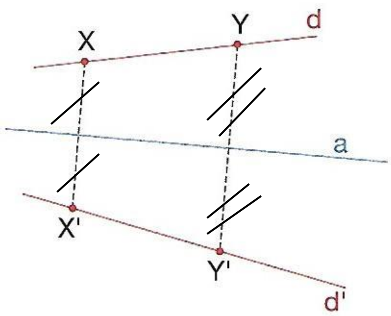
[AB // [A'B' et
[AB et [A'B' sont de sens contraire.

4.2.3. Par la symétrie centrale, l'image d'une demi-droite est une demi-droite qui lui est parallèle et de sens contraire.

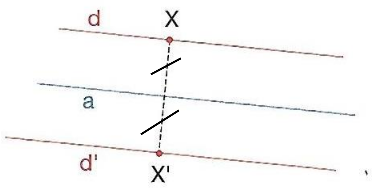


4.3. <u>Symétrie orthogonale</u>

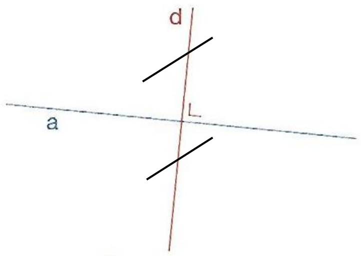
4.3.1. Par la symétrie orthogonale, l'image d'une droite est une droite qui lui est sécante.



4.3.2. Par une symétrie orthogonale, l'image d'une droite parallèle à l'axe est une droite qui lui est parallèle.



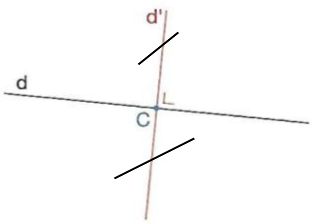
4.3.3. Par une symétrie orthogonale, l'image d'une droite perpendiculaire à l'axe est la droite elle-même.



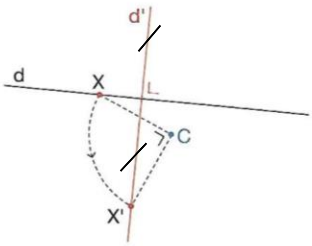
5. <u>Rotation</u>

Par une rotation d'amplitude +90° ou – 90°, l'image d'une droite est une droite qui lui est perpendiculaire.

$C \in d$

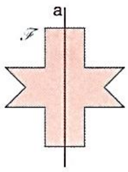


$C \notin d$

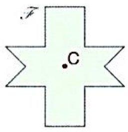


II. THEORIE – Axes de symétrie

1. <u>Définitions</u>

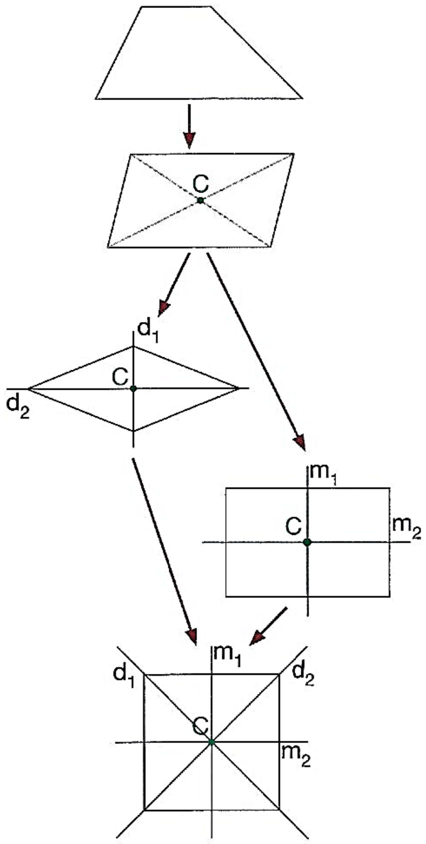


*1.1. Un **axe** de symétrie d'une figure est une droite a telle que l'image de cette figure par la symétrie orthogonale d'axe a est la figure elle-même.*



*1.2. Le **centre** de symétrie d'une figure est un point C tel que l'image de la figure par la symétrie centrale de centre C est la figure elle- même*

2. <u>Axes et centres de symétries des quadrilatères</u>



- *<u>Un trapèze ne possède</u>*
  - *Pas d'axe de symétrie*
  - *Ni de centre de symétrie*

- *<u>Un parallélogramme possède</u>*
  - *Un centre de symétrie (le point d'intersection des es diagonales)*
  - *Aucun axe de symétrie*

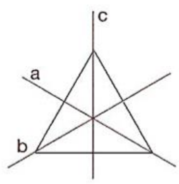
- *<u>Un losange possède</u>*
  - *2 axes de symétries (ses diagonales)*
  - *1 centre de symétrie (le point d'intersection des es diagonales)*

- *<u>Un rectangle possède</u>*
  - *2 axes de symétrie (ses médianes)*
  - *1 centre de symétrie (le point d'intersection de ses médianes)*

- *<u>Un carré possède</u>*
  - *4 axes de symétries (ses médianes et ses diagonales)*
  - *1 centre de symétrie (le point d'intersection des diagonales et des médianes)*

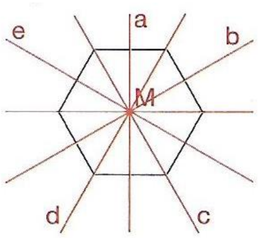
3. <u>Axes et centres de symétrie des triangles</u>

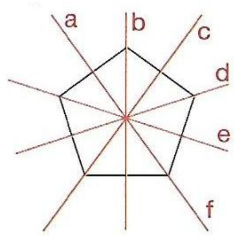
3.1. Un triangle ne possède pas de centre de symétrie.
3.2. Un triangle isocèle possède 1 axe de symétrie (la médiatrice de la base).
3.3. Un triangle équilatéral possède 3 axes de symétries (la médiatrice de chaque côté)



4. <u>Axes et centres de symétrie de polygones réguliers</u>

4.1. Un polygone régulier a autant d'axes de symétrie que de côtés.
4.2. Quand le nombre de côté est pair, les axes sont les droites joignant les sommets opposés et les droites joignant les milieux des côtés opposés.
4.3. Quand le nombre de côtés est impair, les axes de symétrie sont les droites joignant un sommet au milieu du côté opposé.





5. <u>Axes et centres de symétrie des figures élémentaires</u>

5.1. Une droite possède une infinité d'axes (la droite elle-même et toutes ses perpendiculaires) et une infinité de centres de symétrie (tous les points de la droite). ***(Fig.1)***
5.2. Une demi-droite possède 1 axe de symétrie (la droite contenant la demi-droite) mais pas de centre de symétrie. ***(Fig.2)***
5.3. Un segment possède 2 axes de symétrie (sa médiatrice et la droite passant par ses extrémités) et 1 centre de symétrie (son milieu). ***(Fig. 3)***
5.4. Un angle possède un axe de symétrie (la bissectrice) mais pas de centre de symétrie. ***(Fig.4)***
5.5. Un cercle possède une infinité d'axes (tous ses diamètres) et 1 centre de symétrie (son centre). ***(Fig.5)***

Fig. 1

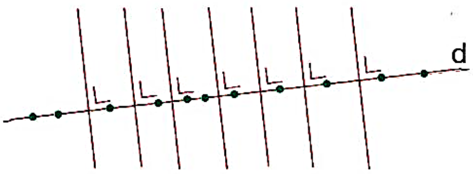


Fig. 2

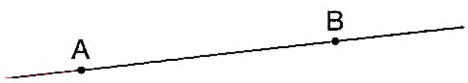


Fig. 3

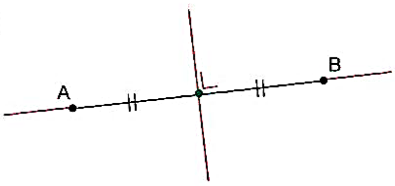


Fig. 4

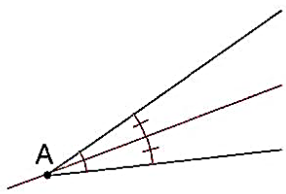
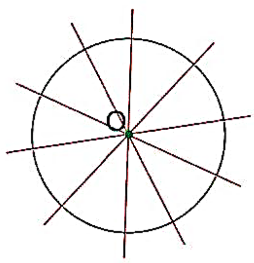
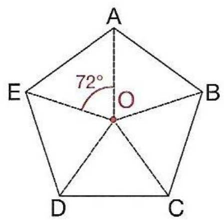


Fig. 5

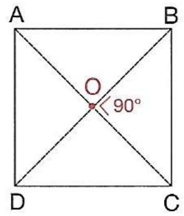


6. <u>Rotations invariantes des polygones réguliers</u>

*Un polygone régulier à n côtés est invariant pour toute rotation dont le centre est le point d'intersection des axes du polygones et dont l'amplitude de l'angle est un multiple de **360°/n**.*



Le pentagone régulier ABCDE est invariant pour toute rotation dont l'amplitude de l'angle est un multiple de 72° $\left(\frac{360°}{5}\right)$ *:*
72°, 144°, 216° et 288°.



Le carré ABCD est invariant pour toute rotation dont l'amplitude de l'angle est un multiple de 90° $\left(\frac{360°}{4}\right)$ *:*
90°, 180° et 270°.

III. THEORIE – Effets des transformations du plan sur les coordonnées

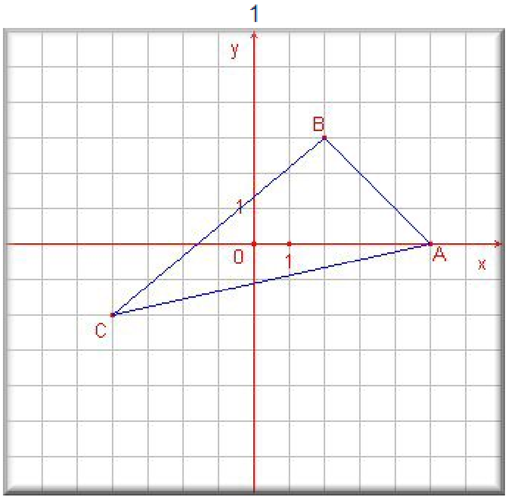
Symétrie orthogonale d'axe x	(x ; y)	→	(x ; **-y**)
Symétrie orthogonale d'axe y	(x ; y)	→	(**-x** ; y)
Symétrie centrale de centre O	(x ; y)	→	(**-x** ; **-y**)
Translation appliquant O sur P	O (x ; y) P (a ; b)	→	(x **+ a** ; y **+ b**)
Rotation de centre O et d'amplitude 90°	(x ; y)	→	**(-y ; x)**
Rotation de centre O et d'amplitude -90°	(x ; y)	→	**(y ; -x)**

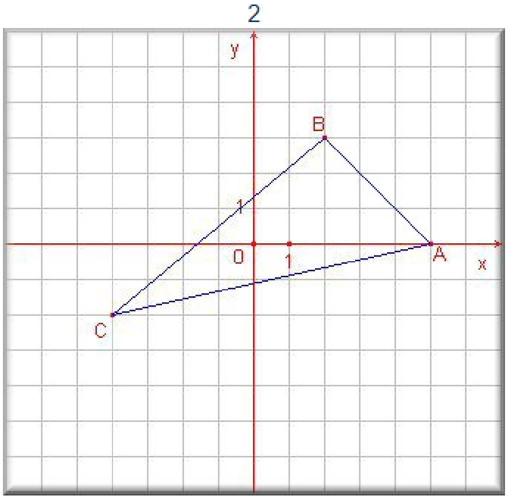
IV. EXERCICES

1. Construire une image

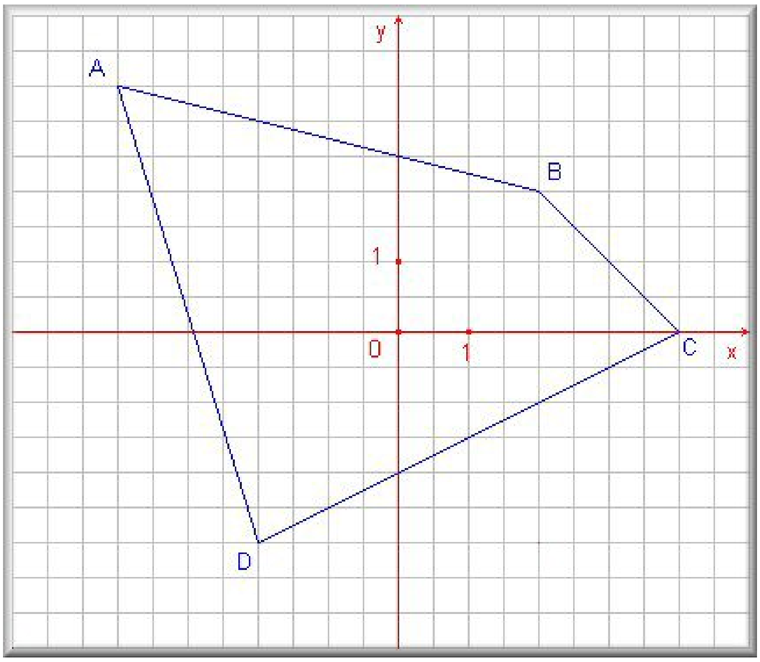
1.1. Dans un repère cartésien, on te donne le triangle ABC.

a) Construis en vert, sur le dessin 1, l'image $A_1B_1C_1$ de ce triangle par la rotation de centre O et d'amplitude 90°
b) Construis sur le dessin 2, l'image $A_2B_2C_2$ de ce même triangle par la rotation de centre O et d'amplitude – 90°.

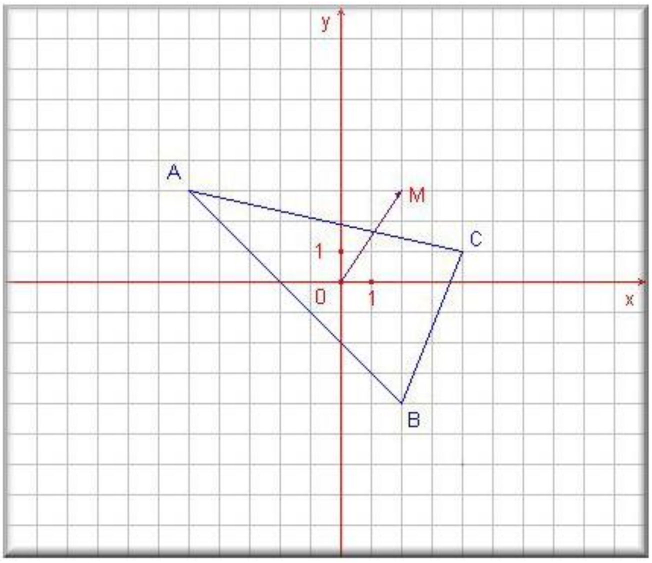




1.2. Dans un repère cartésien, on te donne le quadrilatère $ABCD$. Construis en vert l'image A_1, B_1, C_1, D_1. de ce quadrilatère par la symétrie centrale de centre O.

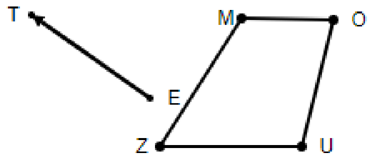


1.3. <u>*Dans le repère cartésien, on te donne le triangle ABC. Construis en vert l'image $A_1B_1C_1$ de ce triangle par la translation qui applique O (0;0) sur M (2;3).*</u>

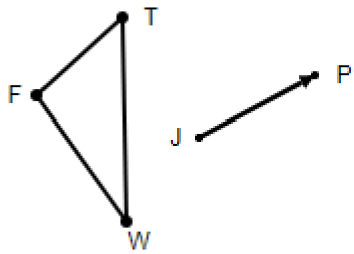


1.4. <u>*Construis la translation demandée ET écris la notation correspondante.*</u>

a) Notation : __________________

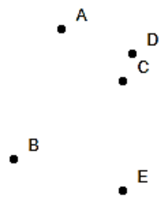


b) Notation : __________________

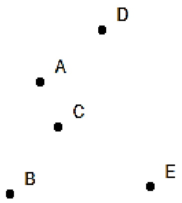


1.5. <u>*Trace les constructions demandées.*</u>

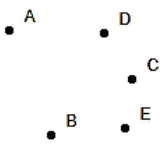
❶ $r_{C,\,+45°}(BCE) = (B'C'E')$



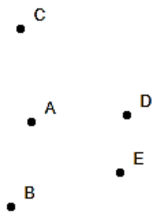
❷ $r_{A,\,-55°}(BCD) = (B'C'D')$



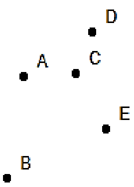
❸ $s_C([BC]) = ([B'C'])$



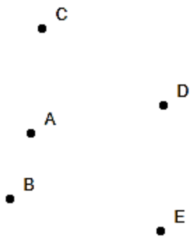
❹ $s_{DB}([AB]) = ([A'B'])$



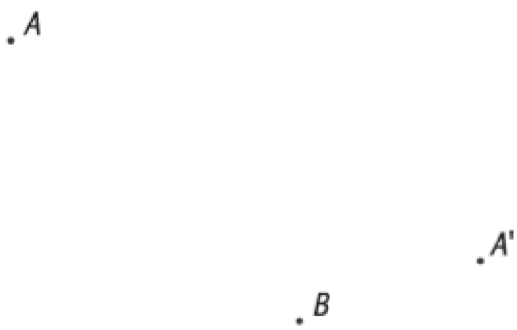
❺ $t_{\overrightarrow{BC}}([CE]) = ([C'E'])$



❻ $r_{A,\,-95°}(ABD) = (A'B'D')$



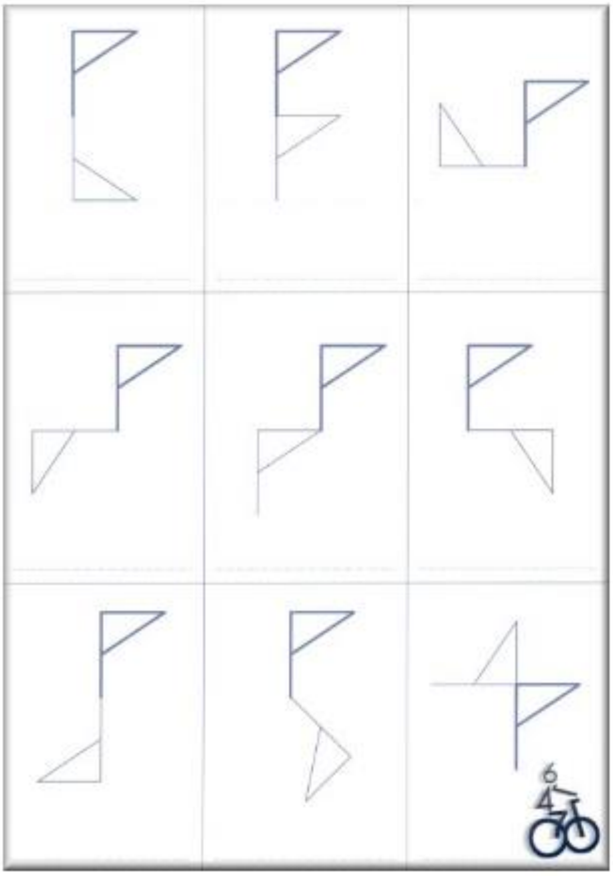
1.6. <u>*Le point A' est l'image du point A par la symétrie orthogonale d'axe d. Construis le point B', image du point B, par cette symétrie orthogonale.*</u>



2. Identifier les transformations du plan

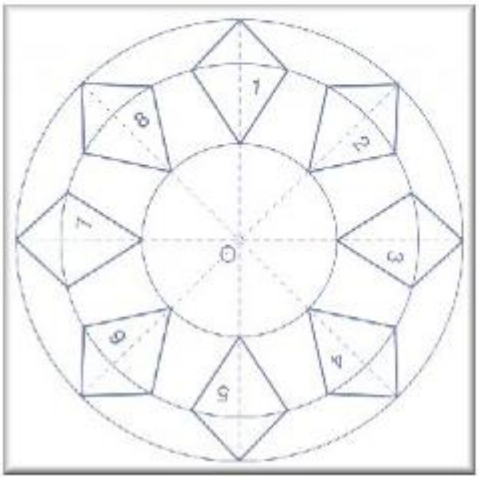
2.1. *Dans chaque cas, détermine la transformation du plan qui applique la figure en trait gras sur l'autre. Pour chaque transformation, précise son élément caractéristique.*

Figure	*Transformation*	*Caractéristique*
1		
2		
3		
4		
5		
6		
7		
8		
9		



2.2. *Détermine la transformation du plan qui applique ...*

a) *La figure 1 sur la figure 2 :* ______________________________
b) *La figure 1 sur la figure 3 :* ______________________________
c) *La figure 2 sur la figure 6 :* ______________________________
d) *La figure 3 sur la figure 1 :* ______________________________
e) *La figure 4 sur la figure 7 :* ______________________________
f) *La figure 1 sur la figure 2 :* ______________________________
g) *La figure 8 sur la figure 8 :* ______________________________



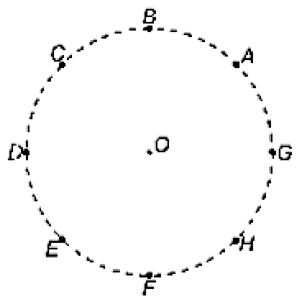
2.3. <u>Les points notés sur ce cercle sont les sommets d'un octogone régulier.</u>

a) *Détermine l'image du triangle OBC par la rotation de centre O et d'amplitude +90°.*

____

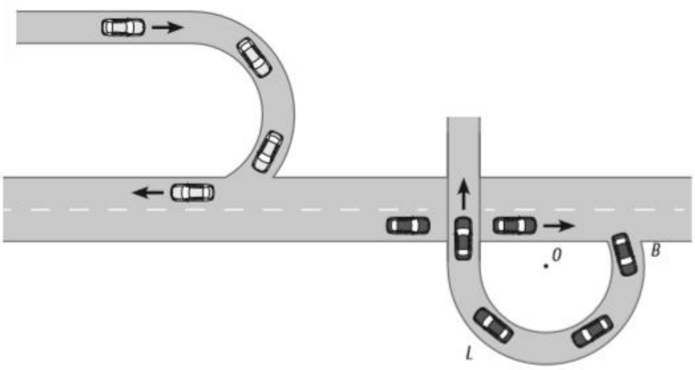
b) *Ecris le sens et l'amplitude de l'angle de la rotation de centre O qui applique le point F sur le point C.*

____

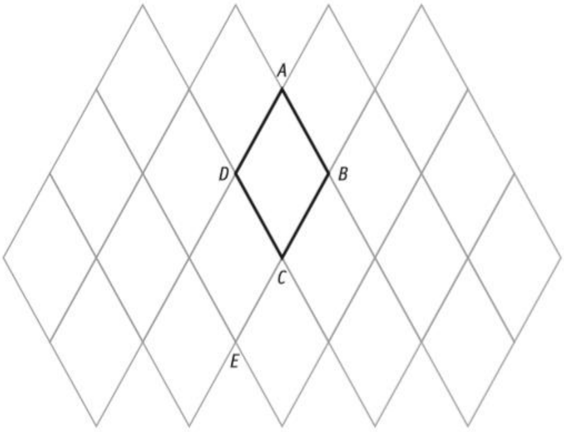


2.4. <u>Voici le plan d'une partie de route sur lequel on a représenté les trajectoires de 2 voitures : une voiture blanche et une voiture noire. La voiture noire passe de la position B à la position L.</u>

a) *Caractérise la rotation de cette voiture. (Amplitude et sens à déterminer)*
b) *Note mathématiquement cette rotation.*



2.5. <u>La partie du paysage représenté ci-dessous est construit de losanges tous identiques au losange $ABCD$. Le losange ABD est équilatéral.</u>



a) *On appelle t la translation qui applique le point B sur le point E. Hachure rouge l'image de $ABCD$ par la translation t* ***ET*** *note mathématiquement la transformation effectuée.*

____

b) *On appelle S la symétrie centrale de centre B. hachure en bleu l'image du losange $ABCD$ par la symétrie centrale S* ***ET*** *note mathématiquement la transformation effectuée.*

____

c) *On appelle R la rotation de centre D qui applique le point B sur le point A. Hachure en vert l'image du losange $ABCD$ par la rotation R* ***ET*** *note mathématiquement la transformation effectuée.*

____

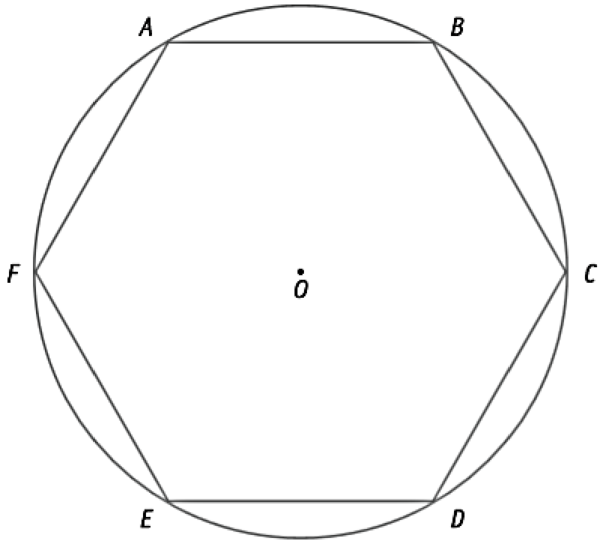
d) *Sans mesurer, détermine l'amplitude de l'angle de la rotation R. Justifie ta réponse.*

Amplitude : _______________ °
Justification : ____
____
____

2.6. <u>Complète.</u>

a) *L'image du point F par la symétrie orthogonale d'axe BE est* _____________ .
b) *L'image du segment [AB] par la symétrie centrale de centre O est* ________ .
c) *L'image du point E par la translation qui applique le point F sur le point O est* ___________ .
d) *L'axe de symétrie qui applique le triangle AOF sur le triangle COD est* _____ .

e) *L'angle $\widehat{ABO}$ a pour image l'angle $\widehat{OCD}$ par la translation qui applique le point _________ sur le point __________ .*

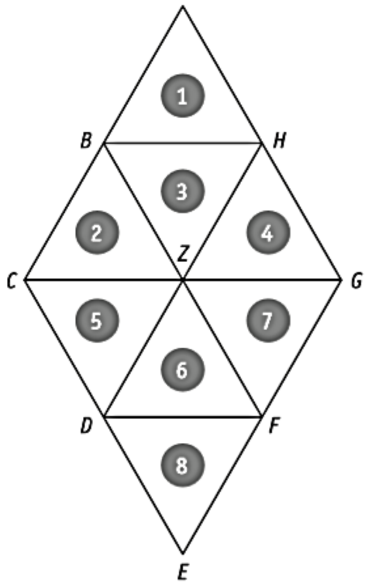


2.7. *La figure ci-dessous est composée de triangles équilatéraux numérotés de 1 à 8.*

a) *Une des transformations du plan qui applique le triangle 1 sur le triangle 6 est ____ .*

b) *Une des transformations du plan qui applique le triangle 1 sur le triangle 8 est ____ .*

c) *Une des transformations du plan qui applique le triangle 1 sur le triangle 4 est ____ .*



2.8. La figure ci-dessous est constituée de 6 losanges superposables.

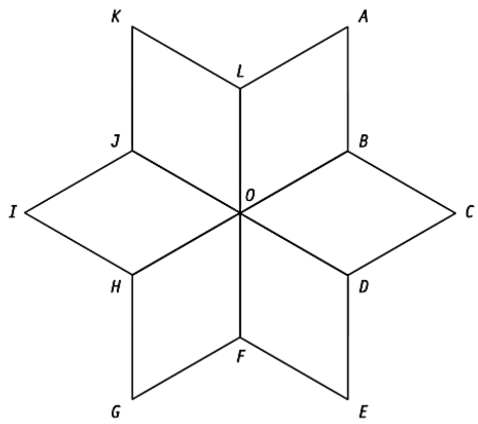
a) Hachure en bleu l'image du losange $KLOJ$ par la symétrie d'axe AG.

b) Hachure en vert l'image du triangle HFO par la symétrie de centre O.

c) Détermine l'image de I par la translation t qui applique le point H sur le point D. _________

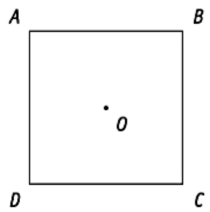
d) On applique R la rotation de centre O qui applique B sur J. Hachure en noir l'image du triangle FED par la rotation R.

e) Déterminer l'amplitude de l'angle par la rotation R. _______°

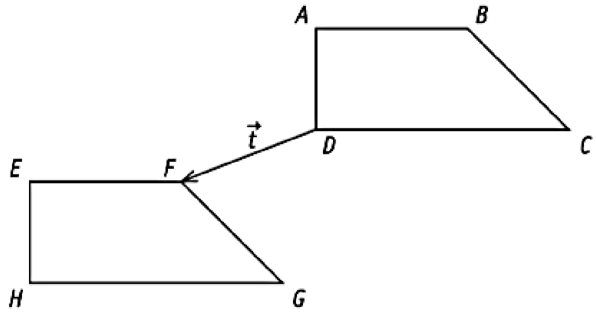


2.9. $ABCD$ est un carré. Le point O est l'intersection des diagonales. Complète en n'utilisant que les points A, B, C, D et O.

- $S_{OD}\,(B) = \cdots$
- $R_{\ldots\ldots\ldots\,.+90°}(B) = D$
- $t_{\vec{CO}}(O) = \cdots$



2.10. Justifie que le trapèze $ABCD$ par la translation t n'est pas le trapèze $EFGH$. Dessine ensuite l'image $EFGH$ du trapèze $ABCD$ par la translation t.



____

____

3. <u>Tracer et identifier des axes et centres de symétrie</u>

3.1. *<u>Voici 3 figures. Pour chacune d'elle,</u>*

a) Trace le ou les axe(s) de symétrie.
b) Dessine le ou les centre(s) de symétrie.
c) Comptabilise-les.

Fig. 1

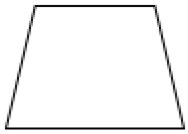


Fig. 2

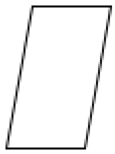
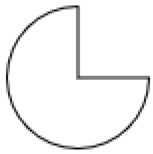
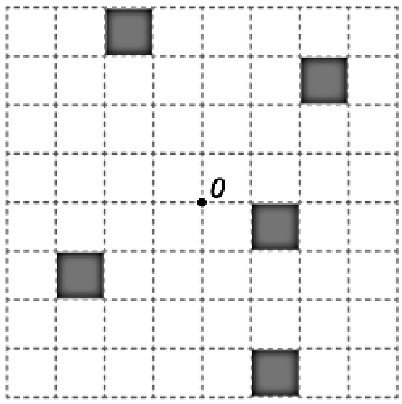


Fig. 3



3.2. *<u>Colorie le minimum de cases pour que la figure ci-dessous admette le point 0 pour centre de symétrie.</u>*



3.3. *<u>Ecris le nom du quadrilatère qui répond à l'affirmation suivante : « Ses diagonales sont ses seuls axes de symétrie. »</u>*

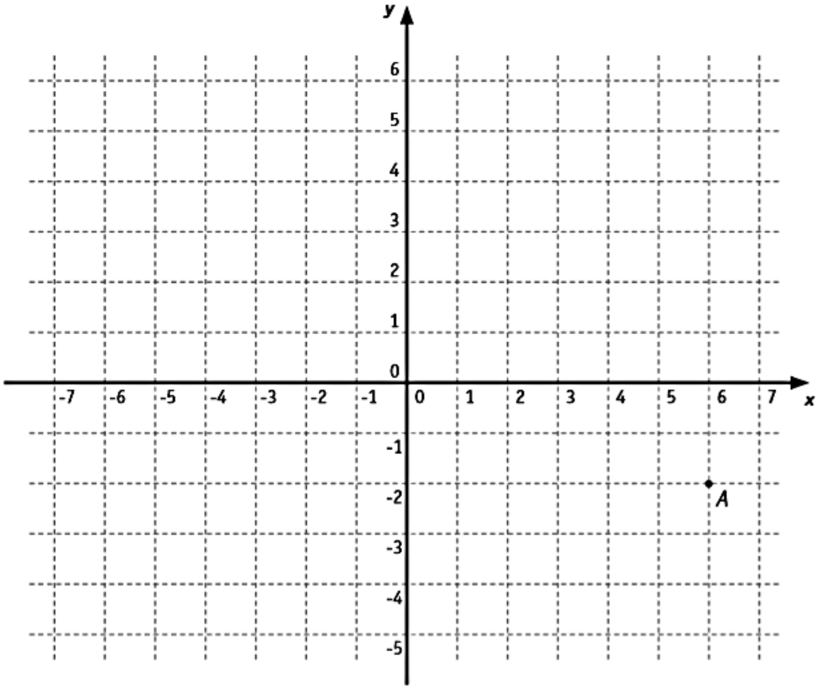
____

3.4. *<u>Complète.</u>*

a) Un quadrilatère qui a un centre de symétrie mais pas d'axe de symétrie est un __________________ .
b) Un polygone dont les bissectrices sont les seuls axes de symétrie est un __________________ .

4. Coordonnées et graphiques

4.1. Réponds aux questions.



a) *Situe le point P de coordonnées (4 ; 0).*

b) *Situe le point S de coordonnées (-2 ; -3).*

c) *Ecris les coordonnées du point A.* *A (____ ; _____)*

d) *Ecris les coordonnées de A', image du point A, par la symétrie centrale de centre O.* *A' (____ ; _____)*

e) *Ecris les coordonnées de B', image du point B (-124 ; -216), par la symétrie orthogonale d'axe x.* *B' (____ ; _____)*

4.2. Vrai ou faux ?

Un triangle equilatéral possède au moins 3 axes de symétrie ...

Le rectangle admet au moins une diagonale comme axe de symétrie ?

Un quadrilatère scalène possède 0 centre de symétrie ...

Les médianes d'un parallélogramme se coupent en leur milieu ...

Les diagonales d'un trapèze scalène sont perpendiculaires ...

Les médianes d'un trapèze scalène ont la même longueur ...

Deux droites perpendiculaires possèdent une infinité de centresde symétrie ...

Les diagonales d'un trapèze isocèle se coupent en leur milieu ...

Les diagonales d'un rectangle ont la même longueur ...

Le parallélogramme admet au moins une médiane comme axe de symétrie ?

Un trapèze isocèle possède 1 axe de symétrie ...

Les médianes d'un trapèze isocèle sont ses axes de symétrie ...

Une demi–droite possède une infinité d'axesde symétrie ...

Les médianes d'un trapèze isocèle sont perpendiculaires ...

Les diagonales d'un cerf–volant ont la même longueur ...